Fortgeschrittene Themen der Wissensrepräsentation

Gabriele Kern-Isberner
LS 1 – Information Engineering

TU Dortmund
Sommersemester 2015

Kapitel 3

3. Revision von Wissenszuständen und konditionalem Wissen

Kapitel 3 – Übersicht

1. AGM-Erweiterung für Wissenszustände
2. Minimal Change-Paradigma bei konditionalem Wissen
3. Neue Postulate für iterierte Revisionen
4. Ein konstruktiver epistemischer Revisionsansatz
5. Revision und induktive Repräsentation
6. Multiple Revision
7. Zusammenfassung und Ausblick

Kapitel 3 – Übersicht

1. AGM-Erweiterung für Wissenszustände
2. Minimal Change-Paradigma bei konditionalem Wissen
3. Neue Postulate für iterierte Revisionen
4. Ein konstruktiver epistemischer Revisionsansatz
5. Revision und induktive Repräsentation
6. Multiple Revision
7. Zusammenfassung und Ausblick

Kapitel 3

3. Revision von Wissenszuständen und konditionalem Wissen

3.1 AGM-Erweiterung für Wissenszustände

Grenzen der AGM-Theorie

Die klassische AGM-Revisionstheorie behandelt nur Ein-Schritt-Postulate – zwar ist das Ergebnis einer AGM-Revision wieder eine (vollständige) Wissensmenge, aber eine nachfolgende Revision muss nichts mit der vorhergehenden Revision zu tun haben:

- es gibt keine “Doppelstern”-Postulate in der AGM-Theorie;
- es gibt keine Axiomatisierung einer grundsätzlichen Revisionsstrategie;
- es gibt keinen vollwertigen zweistelligen Revisionsoperator – der AGM-Revisionsoperator $*$ ist implizit immer von der Wissensmenge abhängig.

Wissensmenge vs. Wissenszustand

- Wissensmenge: Enthält die Sätze (Formeln), die der Agent (zu einer gegebenen Zeit) weiß.
- Wissenszustand: Enthält (im Idealfall) die gesamte Information, die der Agent (zu einer gegebenen Zeit) braucht, um denken und schlussfolgern zu können, insbesondere, um sein Wissen anwenden und verändern zu können.

→ Wissensanwendungs- und -revisionsstrategien
→ konditionales Wissen

Iterierte Revision

$$((K * A) * B) \ldots$$

Um iterierte Revision in einem methodischen Rahmen zu ermöglichen, muss man sich auch mit der Frage beschäftigen, wie Wissensrevisionsstrategien revidiert werden,

d.h. man muss sich mit der Revision konditionalen Wissens bzw. von Wissenszuständen beschäftigen

– was im Prinzip das Gleiche ist, denn

Wissenszustand $\approx$ Gesamtheit aller akzeptierten Konditionale

Wissensstrukturen

Verschiedene Repräsentationen der Strukturen in Wissenszuständen sind möglich:

- Epistemische Verwurzelungsrelationen;
- Rangfunktionen (OCF's) $\kappa : \mathcal{L} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$;
- Menge von Konditionalen, d.h. Menge von Revisionsstrategien;
- auch denkbar: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, probabilistische Netze.

Minimal Change-Paradigma

Ein wichtiger Leitfaden der AGM-Theorie ist das Minimal Change-Paradigma – die durch die Revision vorgenommene Änderung soll so klein wie möglich sein.

Was bedeutet das Minimal Change-Paradigma bei der Revision von Wissenszuständen bzw. Mengen von Konditionalen ?

Propositionales und konditionales Wissen sind grundsätzlich verschieden! Eine naive Gleichbehandlung führt zum Kollaps der Wissensrevision (sog. Gärdenfors'sches Trivialitätsresultat).

Akzeptanz von Konditionalen in Wissensmengen

Ein Konditional $(B|A)$ wird akzeptiert in einer Wissenmenge K,

$$K \models (B|A) \text{ gdw. } B \in K * A$$

Was bedeutet das für die iterierte Revision?

Statt der Wissensmenge K betrachten wir im Folgenden oft (implizit) ihren Core $\phi = \mathit{Core}(K),\ K = Cn(\phi)$ und schreiben dann $K \equiv \phi$.

Ordinale konditionale Rangfunktionen (OCF) (Whlg.)

…sind Funktionen der Form

$$\kappa : \Omega \to \mathbb{N}(\cup\{\infty\})$$

mit den charakteristischen Eigenschaften

$$\kappa^{-1}(0) \neq \emptyset, \quad \kappa(A \vee B) = \min\{\kappa(A), \kappa(B)\}$$

Die Wissensmenge einer ordinalen Rangfunktion bestimmt sich durch

$$\mathit{Bel}(\kappa) = \mathit{Th}(\{\kappa^{-1}(0)\})$$

d.h. $Mod(\mathit{Bel}(\kappa)) = \{\omega \in \Omega \mid \kappa(\omega) = 0\}$.

OCF's für Wissen, Revision und Inferenz

Eine OCF ordnet Formeln Glaubensgrade (genauer: Überraschungsgrade) zu, d.h. ist Repräsentation eines epistemischen Zustandes.

Jede OCF repräsentiert eine totale $K = \mathit{Bel}(\kappa)$-persistente Präordnung (qualitatives Ranking) mittels

$$A \leq_\kappa B \quad \text{gdw.} \quad \kappa(A) \leq \kappa(B)$$

Totale K-persistente Präordungen liefern die Basis für AGM-Revisionen:

$$K * A = \mathit{Th}(\min(Mod(A), \leq_\kappa))$$

Dank des Zusammenhangs zwischen BR und NMR lassen sich OCF's auch für unsicheres Schlussfolgern verwenden.

Allerdings – AGM benutzt OCFs, liefert aber keine OCFs zurück. Dies führt zu Problemen mit konditionalem Wissen.

Beispiel Tier 1/2

Der Agent sieht ein unbekanntes Tier aus der Entfernung, das zu bellen scheint – er schließt also einen fliegenden Vogel aus:

$$\phi \equiv \neg \mathit{bird} \wedge \neg \mathit{flies}$$

Dennoch – der Agent akzeptiert auch das Konditional $(\mathit{flies}|\mathit{bird})$, $K \models (\mathit{flies}|\mathit{bird})$.

Nun macht der Agent die Beobachtung, dass das Tier fliegt.

Frage: Akzeptiert ein AGM-Agent immer noch $(\mathit{flies}|\mathit{bird})$?

Beispiel Tier 2/2

b - *bird*, f - *flies*, Repräsentation des Wissenszustandes durch OCF κ

Revidierte OCF $\kappa^* = \kappa * f$ (konform mit AGM):

ω	κ	$\kappa * f$
bf	2	1
$b\overline{f}$	3	1
$\overline{b}f$	1	0
$\overline{b}\,\overline{f}$	0	1

Nach AGM-Revision gilt:

Bel$(\kappa * f) \equiv \overline{b}f$, *Bel*$(\kappa) \models (f|b)$;

Bel$(\kappa * b) \equiv bf$, *Bel*$((\kappa * f) * b) \equiv b$, d.h. *Bel*$(\kappa * f) \not\models (f|b)$.

Das Konditional $(f|b)$ wird also (ungerechtfertigerweise) aufgegeben.

Beispiel Lady 1/2

Eine junge Dame sieht reich aus und redet klug daher, also glaubt der Agent auch, dass sie reich und klug ist:

$$\phi \equiv \mathit{smart} \wedge \mathit{rich};$$

da er keine Vorurteile hat, akzeptiert er auch das eine ohne das andere, d.h.

$$K \models (\mathit{smart}|\neg \mathit{rich}),\ K \models (\mathit{rich}|\neg \mathit{smart});$$

nun stellt der Agent fest, dass die junge Dame doch nicht so klug ist.

Frage: Was glaubt der Agent nach der Revision $\phi * \neg \mathit{smart}$?

Beispiel Lady 2/2

s - *smart*, r - *rich*, Repräsentation des Wissenszustandes via OCF κ

Revidierte OCF $\kappa^* = \kappa * \overline{s}$ (konform mit AGM):

ω	κ	$\kappa * \overline{s}$
sr	0	2
$s\overline{r}$	1	1
$\overline{s}r$	1	0
$\overline{s}\,\overline{r}$	2	1

Nach AGM-Revision gilt:

Bel$(\kappa * \overline{s}) \equiv \overline{s}r$; *Bel*$(\kappa * s) \equiv sr$;

Bel$((\kappa * \overline{s}) * s) \equiv s\overline{r}$, d.h. *Bel*$(\kappa * \overline{s}) \models (\overline{r}|s)$.

Ein Konditional wird also nach der Revision ungerechtfertigerweise geglaubt.

AGM-Theorie ungeeignet?

Ist die AGM-Theorie also generell ungeeignet für “anspruchsvolle” Wissensrevision?

Zentraler Punkt: Man muss ganz klar zwischen Wissenszustand Ψ und zugehöriger Wissensmenge $Bel(\Psi)$ unterscheiden:

Ψ bestimmt $Bel(\Psi)$ eindeutig, aber nicht umgekehrt!

Wir müssen die AGM-Postulate zunächst so formulieren, dass sie diese Unterscheidung respektieren und trotzdem etwas über die Revision von Wissenszuständen aussagen.

Epistemische AGM-Postulate (AGMes) 1/2

ESR = Epistemic State Revision

Ψ Wissenszustand, $A \in \mathcal{L}$ neue Information

(ESR *1) $\mathit{Bel}(\Psi * A) \models A$
(Altes Postulat: $\phi * A \models A$)

(ESR *2) Wenn $\mathit{Bel}(\Psi) \wedge A$ erfüllbar, dann $\mathit{Bel}(\Psi * A) \equiv \mathit{Bel}(\Psi) \wedge A$.
(Altes Postulat: Wenn $\phi \wedge A$ erfüllbar, dann $\phi * A \equiv \phi \wedge A$.)

(ESR *3) Wenn A erfüllbar, dann $\mathit{Bel}(\Psi * A)$ erfüllbar.
(Altes Postulat: Wenn A erfüllbar, dann $\phi * A$ erfüllbar.)

Epistemische AGM-Postulate (AGMes) 2/2

(ESR *4) Wenn $\Psi_1 = \Psi_2$ und $A_1 \equiv A_2$, dann $\mathit{Bel}(\Psi_1 * A_1) \equiv \mathit{Bel}(\Psi_2 * A_2)$.
(Altes Postulat: Wenn $\phi_1 \equiv \phi_2$ und $A_1 \equiv A_2$, dann $\phi_1 * A_1 \equiv \phi_2 * A_2$.)

(ESR *5) $\mathit{Bel}(\Psi * A) \wedge B \models \mathit{Bel}(\Psi * (A \wedge B))$
(Altes Postulat: $(\phi * A) \wedge B \models \phi * (A \wedge B)$)

(ESR *6) Wenn $\mathit{Bel}(\Psi * A) \wedge B$ erfüllbar, dann $\mathit{Bel}(\Psi * (A \wedge B)) \models \mathit{Bel}(\Psi * A) \wedge B$.
(Altes Postulat: Wenn $(\phi * A) \wedge B$ erfüllbar, dann $\phi * (A \wedge B) \models (\phi * A) \wedge B$.)

AGM vs. AGMes

In den epistemischen AGM-Postulaten AGMes sind folgende Unterschiede wichtig:

- Der Revisionsoperator $*$ wird auf einen Wissenszustand Ψ angewendet.
- Aussagen über die zugehörige Wissensmenge $Bel(\Psi)$ werden von Aussagen über den ganzen Wissenszustand Ψ klar unterschieden.
- Die stärkste Unterscheidung bzw. Neuerung bewirkt das Postulat **(ESR *4)**.

Das Postulat (ESR *4) 1/2

Eine simple Übertragung des AGM-Postulats

(RF4) *Wenn* $\phi_1 \equiv \phi_2$ *und* $A_1 \equiv A_2$, *dann* $\phi_1 * A_1 \equiv \phi_2 * A_2$

in den epistemischen Rahmen würde lauten:

(RF4es) *Wenn* $Bel(\Psi_1) \equiv Bel(\Psi_2)$ *und* $A_1 \equiv A_2$, *dann* $Bel(\Psi_1 * A_1) \equiv Bel(\Psi_2 * A_2)$,

was bedeutet

Wenn die Wissenszustände Ψ_1 *und* Ψ_2 *äquivalente Wissensmengen* $Bel(\Psi_1) \equiv Bel(\Psi_2)$ *haben, dann haben auch ihre durch äquivalentes Wissen* $A_1 \equiv A_2$ *revidierten Wissenszustände* $\Psi_1 * A_1$ *und* $\Psi_2 * A_2$ *äquivalente Wissensmengen.*

Das Postulat (ESR *4) 2/2

Das neue Postulat **(ESR *4)** hingegen fordert für diese Aussage identische Wissenszustände:

> **(ESR *4)** *Wenn* $\Psi_1 = \Psi_2$ *und* $A_1 \equiv A_2$, *dann* $Bel(\Psi_1 * A_1) \equiv Bel(\Psi_2 * A_2)$.

Dass die einfache Übertragung für den epistemischen Rahmen unangemessen ist, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel zu Postulat (ESR *4)

Agent Somerset und Agent Mills müssen einen Mord aufklären. Beide halten A mit großer Wahrscheinlichkeit für den Mörder:

$$\mathit{Bel}(\Psi_{Somerset}) \equiv \mathit{Bel}(\Psi_{Mills}) \equiv A.$$

Agent Somerset hält darüberhinaus B für einen möglichen Täter, schließt aber C mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit aus.

Agent Mills hingegen hält C ebenfalls für verdächtig, ist aber überzeugt, dass B es auf keinen Fall gewesen sein kann.

Nun legt A überraschend ein hieb- und stichfestes Alibi vor – beide Agenten müssen ihr Wissen mit $\neg A$ revidieren; wir erwarten

$$\mathit{Bel}(\Psi_{Somerset} * \overline{A}) \models B\overline{C}, \quad \mathit{Bel}(\Psi_{Mills} * \overline{A}) \models \overline{B}C$$

Nach der einfachen Übertragung ist das aber nicht möglich!

Akzeptanz von Konditionalen

Wir definieren nun allgemein die Akzeptanz von Konditionalen in Wissenszuständen mit Hilfe von Revisionen:

Ein Wissenszustand Ψ akzeptiert das Konditional $(B|A)$,

$$\Psi \models (B|A) \quad \text{gdw.} \quad \mathit{Bel}(\Psi * A) \models B$$

$(B|A)$ ist dann konditionales Wissen in Ψ.

Es bleibt noch, die AGMes-Revisionen zu charakterisieren.

Treue Zuordnungen 1/2

Wir ordnen nun Wissenszuständen Ψ totale Präordnungen $\leq_\Psi$ auf Ω zu:

$$\Psi \mapsto \leq_\Psi$$

Wie üblich benutzen wir die folgenden Abkürzungen:

$\omega_1 <_\Psi \omega_2$ gdw. $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ und nicht $\omega_2 \leq_\Psi \omega_1$;

$\omega_1 =_\Psi \omega_2$ gdw. $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ und $\omega_2 \leq_\Psi \omega_1$

Treue Zuordnungen 2/2

Eine solche Zuordnung $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ heißt treu, wenn gilt:

- $\omega_1, \omega_2 \models Bel(\Psi)$ impliziert $\omega_1 =_\Psi \omega_2$;
- $\omega_1 \models Bel(\Psi)$ und $\omega_2 \not\models Bel(\Psi)$ impliziert $\omega_1 <_\Psi \omega_2$;
- $\Phi = \Psi$ impliziert $\leq_\Phi = \leq_\Psi$, d.h. identische Wissenszustände werden denselben Präordnungen zugewiesen (Wohldefiniertheit der Zuordnung).

Insbesondere genügt die Bedingung $Bel(\Phi) \equiv Bel(\Psi)$ nicht, um $\leq_\Phi = \leq_\Psi$ zu implizieren.

Charakterisierung von AGMes-Revisionen

Für epistemische AGM-Revisionen gilt die folgende Charakterisierung (in Analogie zur Revision von Wissensmengen mit Hilfe K-persistenter Relationen):

Theorem 1

*Ein Revisionsoperator $*$ für Wissenszustände erfüllt genau dann die Postulate (ESR *1) - (ESR *6), wenn es eine treue Zuordnung $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ gibt mit*

$$Mod(\mathit{Bel}(\Psi * A)) = \min(Mod(A), \leq_\Psi)$$

Insbesondere ist mit Hilfe einer OCF κ eine AGMes-Revision in gewohnter Weise möglich.

Beispiele Tier und Lady

b – *bird*, f – *flies*

ω	κ	$\kappa * f$
bf	2	1
$b\overline{f}$	3	1
$\overline{b}f$	1	0
$\overline{b}\,\overline{f}$	0	1

s – *smart*, r – *rich*

ω	κ	$\kappa * \overline{s}$
sr	0	2
$s\overline{r}$	1	1
$\overline{s}r$	1	0
$\overline{s}\,\overline{r}$	2	1

Beide Revisionen aus den Beispielen sind sogar epistemische AGM-Revisionen, auch (AGMes) löst also die obigen Probleme nicht.

Kapitel 3 – Übersicht

Kapitel 3

3. Revision von Wissenszuständen und konditionalem Wissen

3.2 Minimal Change-Paradigma bei konditionalem Wissen

Minimal Change-Paradigma – Revisited 1/2

Bei “normaler” (propositionaler) AGM-Revision von Wissensmengen bedeutet Minimal Change, das möglichst wenig oder möglichst unbedeutendes Wissen geändert werden soll (inklusions- oder kardinalitätsbasierte bzw. relationale Kriterien).

Eine Änderung eines Wissenszustanes bedeutet auch immer eine Änderung des akzeptierten konditionalen Wissens, d.h. bisher akzeptierte konditionale Zusammenhänge müssen aufgegeben werden, neue werden etabliert.

Minimal Change-Paradigma – Revisited 2/2

Ebenso bedeutet es eine Änderung ("Verschiebung") in der (qualitativen oder quantitativen) Ordnungsstruktur, die einem Wissenszustand zugrunde liegt;
es gilt insbesondere:

> $\Psi \models (B|A)$ gilt genau dann, wenn es $\omega \in \Omega$ gibt mit $\omega \models AB$ und $\omega <_\Psi \omega'$ für jedes $\omega' \models A\overline{B}$ gilt.

Ein Postulat für "minimalste" Änderung 1/5

Sei $\Psi * A$ ein mit A revidierter Wissenszustand. Wir betrachten $\leq_\Psi$ und $\leq_{\Psi * A}$ und wollen versuchen, die Unterschiede zwischen diesen beiden Präordnungen zu minimieren (allerdings unter der Voraussetzung, dass die AGMes-Postulate eingehalten werden).

Wegen AGMes und der Treue-Eigenschaft gilt das Folgende:

- $Mod(\mathit{Bel}(\Psi * A)) = \min(Mod(A), \leq_\Psi)$;
- wenn $\omega_1, \omega_2 \models \mathit{Bel}(\Psi * A)$, dann $\omega_1 =_{\Psi * A} \omega_2$;
- wenn $\omega_1 \models \mathit{Bel}(\Psi * A)$ und $\omega_2 \models \neg \mathit{Bel}(\Psi * A)$, dann $\omega_1 <_{\Psi * A} \omega_2$.

Ein Postulat für "minimalste" Änderung 2/5

Es bleibt also noch, die Präordnung $\leq_{\Psi * A}$ auf $\Omega \backslash Mod(\mathit{Bel}(\Psi * A))$ zu bestimmen.

Hier erreicht man eine minimale Änderung sicherlich, wenn man fordert, dass $\leq_{\Psi}$ und $\leq_{\Psi * A}$ auf $\Omega \backslash Mod(\mathit{Bel}(\Psi * A))$ übereinstimmen:

(min$\leq$ *) Wenn $\omega_1, \omega_2 \models \neg \mathit{Bel}(\Psi * A)$, dann gilt

$$\omega_1 \leq_{\Psi} \omega_2 \text{ gdw. } \omega_1 \leq_{\Psi * A} \omega_2$$

Ein Postulat für "minimalste" Änderung 3/5

Unter der Bedingung, dass $*$ die AGMes-Postulate erfüllt und die Präordnungen den Wissenszuständen treu zugeordnet werden, ist **(min$\leq *$)** äquivalent zu dem Postulat

(CB) Wenn $\mathit{Bel}(\Psi * A) \models \neg B$, dann

$$\mathit{Bel}((\Psi * A) * B) \equiv \mathit{Bel}(\Psi * B)$$

D.h. **(CB)** garantiert eine minimale Änderung des konditionalen Wissens (d.h. der Präordnung $\leq_\Psi$) unter der Bedingung, dass die Revision des Wissenszustandes nach den epistemischen AGM-Postulaten erfolgt.

Ein Postulat für "minimalste" Änderung 4/5

(CB) würde die unintuitiven iterierten Revisionen in den Beispielen "Tier" und "Lady" verhindern:

Beispiel "Tier": $\mathit{Bel}(\Psi * f) \equiv \bar{b}f \models \bar{b}$; aber $\mathit{Bel}((\Psi * f) * b) \equiv b$, während $\mathit{Bel}(\Psi * b) \equiv bf$, d.h. **(CB)** ist verletzt.

♣

Beispiel "Lady": $\mathit{Bel}(\Psi * \bar{s}) \models \neg s$; aber $\mathit{Bel}((\Psi * \bar{s}) * s) \equiv s\bar{r}$, während $\mathit{Bel}(\Psi * s) \equiv sr$. Auch hier ist **(CB)** verletzt.

♣

Also wären beide (unintuitiven) Revisions-Resultate mit (CB) nicht möglich gewesen.

Ein Postulat für "minimalste" Änderung 5/5

Ist eine solche minimale Änderung wirklich wünschenswert?

(CB) ist ein Overkill, da die zweite Revision die erste vollkommen annulliert. Das erscheint jedoch nicht immer gerechtfertigt, da die Ursache des Widerspruchs zwischen den beiden Evidenzen möglicherweise in Ψ selbst liegt.

Beispiel Tier 1/2

Wir begegnen wieder einmal einem seltsamen, unbekannten Tier; es scheint ein Vogel zu sein:

$$Bel(\Psi) \equiv bird$$

Sollten wir das Gegenteil erfahren, so würden wir dieses Wissen vollständig aufgeben:

$$Bel(\Psi * \neg bird) \equiv \neg bird$$

Das Tier nähert sich, und wir sehen, dass es rot ist:

$$Bel(\Psi * red) \equiv bird \wedge red \models bird$$

Beispiel Tier 2/2

Ein Experte untersucht nun das Tier – es ist doch kein Vogel

$$\mathit{Bel}((\Psi * \mathit{red}) * \neg \mathit{bird}) \equiv \mathit{Bel}(\Psi * \neg \mathit{bird}) \text{ nach (CB)},$$

– die Information rot wurde einfach vergessen**!**

Viel sinnvoller wäre es, in $\Psi * \mathit{red}$ das neue konditionale Wissen

Wäre das Tier kein Vogel, so wäre es (trotzdem) rot – $(r|\bar{b})$

zu akquirieren, das in Ψ noch vollkommen unbegründet erschien.

Problematik der iterierten Revision

Minimierung der Änderung konditionaler Beziehungen kann also zu unmotivierten Änderungen beim propositionalen Wissen führen; z.B. kann (CB) dazu führen, dass konditionales Wissen auf Kosten von propositionalem Wissen geschützt wird.

Um unintuitiven Wissensänderungen vorzubeugen, muss nicht nur der absolute Rang der Welten berücksichtigt werden, sondern auch ihre relative Lage zueinander.

Im nächsten Abschnitt werden geeignetere Postulate und ein konstruktiver Ansatz für die Revision von OCFs vorgestellt.

Kapitel 3 – Übersicht

Kapitel 3

3. Revision von Wissenszuständen und konditionalem Wissen

3.3 Neue Postulate für iterierte Revisionen

Postulate von Darwiche & Pearl

Darwiche & Pearl schlugen 1997 vier weitere (Doppelstern-)Postulate (CR1) - (CR4) vor, die in besonderer Weise das konditionale Wissen berücksichtigten (Prinzip der konditionalen Erhaltung sollte das Minimal Change-Prinzip ersetzen):

A. Darwiche and J. Pearl:
On the logic of iterated belief revision.
Artificial Intelligence, 89:1–29, 1997.

Im Folgenden sei vorausgesetzt, dass Ψ ein Wissenszustand ist (z.B. repräsentiert durch eine Rangfunktion κ) und $A \in \mathcal{L}$ eine Formel.

Postulat (CR1)

(CR1) Wenn $B \models A$, dann $\mathit{Bel}((\Psi * A) * B) \equiv \mathit{Bel}(\Psi * B)$.

Wenn die zweite Information spezifischer (genauer) ist als die erste, dann ist die erste redundant und kann vernachlässigt werden.

Konditionale Version:
Wenn $B \models A$, dann

$$\Psi \models (C|B) \quad \text{gdw.} \quad \Psi * A \models (C|B)$$

Eine neue Information sollte kein konditionales Wissen ändern, dass sich auf einen spezifischeren Kontext bezieht.

Beispiel "Schaltung" zu (CR1) 1/2

Wir betrachten eine Schaltung, bestehend aus einem Addierer und einem Multiplizierer, mit den folgenden Notationen:

a – Addierer okay, m – Multiplizierer okay

und dem Anfangswissenstand $Bel(\Psi) \equiv am$ sowie $\Psi \models (\overline{m}|\overline{a} \vee \overline{m})$ (Multiplizier sind anfälliger für Defekte als Addierer).

1. Information: Schaltung defekt, d.h. $B_1 = \neg(am) \equiv \overline{a} \vee \overline{m}$.
2. Information: Addierer schadhaft, d.h. $B_2 = \overline{a}$.

Gewünschte Schlussfolgerung: Der Multiplizierer ist okay, d.h. $Bel((\Psi * B_1) * B_2) \models m$.

Beispiel "Schaltung" zu (CR1) 2/2

$\mathit{Bel}(\Psi * B_1) \models \overline{m} \vee \overline{a}$, $\mathit{Bel}(\Psi * B_2) \models \overline{a}m$;

wir benutzen (CR1): $B_2 = \overline{a} \models \overline{a} \vee \overline{m} \equiv B_1$, also gilt:

$$\mathit{Bel}((\Psi * B_1) * B_2) \equiv \mathit{Bel}(\Psi * B_2) \models m.$$

Postulat (CR2)

(CR2) Wenn $B \models \neg A$, dann *Bel*$((\Psi * A) * B) \equiv$ *Bel*$(\Psi * B)$.

Wenn zwei widersprüchliche Informationen zu lernen sind, überschreibt die zweite die erste und alle ihre Auswirkungen.

Konditionale Version:
Wenn $B \models \neg A$, dann

$$\Psi \models (C|B) \quad \text{gdw.} \quad \Psi * A \models (C|B)$$

Da sich B und A ausschließen, soll die Revision mit A kein konditionales Wissen mit Prämisse B tangieren.

Bitte beachten: (CR2) besagt nicht dasselbe wie (CB) – in (CB) gilt die Voraussetzung $\Psi * A \models \neg B$!

Beispiel “Lady” (für (CR2)

Hier war $Bel(\Psi) \equiv sr,\ B_1 = \overline{s}$;
nehmen wir nun an, wir erfahren $B_2 = s$;
Anwendung von (CR2) ergibt hier, wie gewünscht:

$$\begin{aligned} Bel((\Psi * \overline{s}) * s) &\equiv Bel(\Psi * s) \\ &\equiv Bel(\Psi) \equiv sr, \end{aligned}$$

also $Bel((\Psi * \overline{s}) * s) \models r$.

Postulat (CR3)

(CR3) Wenn $\mathit{Bel}(\Psi * B) \models A$, dann auch $\mathit{Bel}((\Psi * A) * B) \models A$.

Eine Information A soll nicht aufgegeben werden, wenn eine neue Information B integriert wird, sofern vor dem Hintergrund des gegenwärtigen Wissens (Ψ) B A impliziert.

Konditionale Version:

$$\text{Wenn } \Psi \models (A|B), \text{ dann auch } \Psi * A \models (A|B).$$

Wird das Konditional $(A|B)$ in Ψ akzeptiert, dann soll die Revision mit A nichts daran ändern.

Beispiel "Tier" für Postulat (CR3)

Hier war $Bel(\Psi) = \overline{b}\,\overline{f},\ B_1 = f,\ B_2 = b$;

Anwendung von (CR3) ergibt hier, wie gewünscht:

$$Bel((\Psi * f) * b) \models f,$$

da auch $Bel(\Psi * b) \models f$.

Postulat (CR4)

(CR4) Wenn $\mathit{Bel}(\Psi * B) \not\models \neg A$, dann auch $\mathit{Bel}((\Psi * A) * B) \not\models \neg A$.

Keine Information soll zu ihrer eigenen Ablehnung beitragen – wenn nichts gegen A spricht nach dem Lernen von B, so sollte auch ein vorheriges Lernen von A nichts daran ändern.

Konditionale Version:

$$\text{Wenn } \Psi \not\models (\neg A|B), \text{ dann auch } \Psi * A \not\models (\neg A|B).$$

Die Revision mit A soll nicht zur Akzeptanz eines Konditionals $(\neg A|B)$ führen.

Beispiel "Good day, sunshine!" zu (CR4) 1/2

Ein Philosoph wacht eines Morgens auf und sieht, dass die Sonne scheint – folglich hat er keinen Grund anzunehmen, dass es kein schöner Tag werden wird. Seine Frau erzählt ihm, dass gerade vor einigen Minuten der Wetterbericht einen warmen, sonnigen Tag angekündigt hat.

Was hätte der Philosoph gedacht, wenn er den Wetterbericht gehört hätte, bevor er nach draußen geschaut hätte?

Beispiel "Good day, sunshine!" zu (CR4) 2/2

s – sun is shining, n – nice day,

Anfangswissenstand Ψ

1. Information: Die Sonne scheint – $B_1 = s$;
2. Information: Der Wetterbericht hat einen schönen Tag versprochen – $B_2 = n$;

mit (CR4) folgt, wie erwartet:

$$\mathit{Bel}((\Psi * n) * s) \not\models \overline{n},$$

da ja auch $\mathit{Bel}(\Psi * s) \not\models \overline{n}$.

Die Postulate im Überblick ...

(CR1) Wenn $B \models A$, dann $\mathit{Bel}((\Psi * A) * B) \equiv \mathit{Bel}(\Psi * B)$.

(CR2) Wenn $B \models \neg A$, dann $\mathit{Bel}((\Psi * A) * B) \equiv \mathit{Bel}(\Psi * B)$.

(CR3) Wenn $\mathit{Bel}(\Psi * B) \models A$, dann auch $\mathit{Bel}((\Psi * A) * B) \models A$.

(CR4) Wenn $\mathit{Bel}(\Psi * B) \not\models \neg A$, dann auch $\mathit{Bel}((\Psi * A) * B) \not\models \neg A$.

…und ihre konditionalen Versionen

(CR1) Wenn $B \models A$, dann: $\Psi \models (C|A)$ gdw. $\Psi * B \models (C|A)$.

(CR2) Wenn $B \models \neg A$, dann: $\Psi \models (C|B)$ gdw. $\Psi * A \models (C|B)$.

(CR3) Wenn $\Psi \models (A|B)$, dann auch $\Psi * A \models (A|B)$.

(CR4) Wenn $\Psi \not\models (\neg A|B)$, dann auch $\Psi * A \not\models (\neg A|B)$.

(CR1) - (CR4) und AGMes

Keines der Postulate (CR1)-(CR4) lässt sich aus den AGM-Postulaten ableiten; man kann leicht Gegenbeispiele finden, d.h. AGMes-Revisionsoperatoren, die die (CR)-Postulate verletzen, z.B.:

- Im Lady-Beispiel verletzte die Revision (CR2), da dort galt: $\mathit{Bel}(\Psi * s) \equiv sr$, aber $\mathit{Bel}((\Psi * \overline{s}) * s) \equiv s\overline{r}$.
- Im Tier-Beispiel galt $\mathit{Bel}(\Psi * b) \equiv bf$, aber $\mathit{Bel}((\Psi * f) * b) \equiv b$, d.h. (CR3) war verletzt.

(CR1)-(CR4) axiomatisieren ansatzweise das Prinzip der konditionalen Erhaltung.

Schön und gut, aber –
wie revidiert man nun Wissenszustände bzw. OCFs richtig[1] und konstruktiv ?

[1] D.h. im Sinne von (CR1-4)

Kapitel 3 – Übersicht

Kapitel 3

3. Revision von Wissenszuständen und konditionalem Wissen

3.4 Ein konstruktiver epistemischer Revisionsansatz

Revision von (qualitativen) Rangfunktionen 1/3

Wie sollen nun die den Wissenszuständen Ψ (treu) zugeordneten totalen Halbordnungen $\leq_\Psi$ revidiert werden?

Von zentraler Bedeutung ist es offensichtlich, zwei Halbordnungen $\leq_\Psi$ und $\leq_{\Psi^*}$, wobei Ψ^* durch Revision aus Ψ hervorgegangen ist, zueinander in Beziehung zu setzen.

Dabei sind die Postulate (CR1)-(CR4) wichtige Richtlinien; dazu das folgende Theorem:

Revision von (qualitativen) Rangfunktionen 2/3

Theorem 2

Der Revisionsoperator $*$ erfülle die AGMes-Postulate. Dann erfüllt $*$ die Postulate (CR1)-(CR4) genau dann, wenn die folgenen Bedingungen erfüllt sind:

- *Wenn* $\omega_1, \omega_2 \in Mod(A)$, *dann* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ *gdw.* $\omega_1 \leq_{\Psi * A} \omega_2$.
- *Wenn* $\omega_1, \omega_2 \in Mod(\overline{A})$, *dann* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ *gdw.* $\omega_1 \leq_{\Psi * A} \omega_2$.
- *Wenn* $\omega_1 \in Mod(A)$ *und* $\omega_2 \in Mod(\overline{A})$, *dann* $\omega_1 <_\Psi \omega_2$ *nur, wenn* $\omega_1 <_{\Psi * A} \omega_2$.
- *Wenn* $\omega_1 \in Mod(A)$ *und* $\omega_2 \in Mod(\overline{A})$, *dann* $\omega_1 \leq_\Psi \omega_2$ *nur, wenn* $\omega_1 \leq_{\Psi * A} \omega_2$.

Revision von (qualitativen) Rangfunktionen 3/3

Dieses Theorem kann man zur Konstruktion von geeigneten, d.h. das konditionale Wissen respektierenden Revisionen von Halbordnungen bzw. OCF's nutzen:

- Modelle von A bzw. von $\overline{A}$ behalten ihre relative Rangordnung (werden aber evtl. verschoben);
- dabei werden Modelle von A tendentiell plausibler, während Modelle von $\overline{A}$ tendentiell unplausibler werden.
- Modelle von $\overline{A}$ dürfen nicht "gleichziehen" mit Modellen von A.
- Modelle von $\overline{A}$ dürfen Modelle von A nicht "überholen".

Beispiel Schaltung nach DP's (C1)-(C4)

ω	κ	$\kappa * (\overline{a} \vee \overline{m})$
am	0	1
$a\overline{m}$	1	0
$\overline{a}m$	2	1
$\overline{a}\,\overline{m}$	3	2

$$\mathit{Bel}((\Psi * (\overline{a} \vee \overline{m})) * \overline{a}) \equiv \overline{a}m \models m$$

Beispiel Lady nach DP's (C1)-(C4)

ω	κ	$\kappa * \overline{s}$	κ^*_{alt}
sr	0	1	(2)
$s\overline{r}$	1	2	(1)
$\overline{s}r$	1	0	(0)
$\overline{s}\,\overline{r}$	2	1	(1)

$\mathit{Bel}((\Psi * \overline{s}) * s) \equiv sr \models r$

Beispiel Tier nach DP's (C1)-(C4)

ω	κ	$\kappa * f$	κ^*_{alt}
bf	2	1	(1)
$b\overline{f}$	3	$\{2,3,4\}$	(1)
$\overline{b}f$	1	0	(0)
$\overline{b}\,\overline{f}$	0	1	(1)

$\mathit{Bel}((\Psi * f) * b) \equiv bf \models f$

Beispiel Good day, sunshine! nach DP's (C1)-(C4)

ω	κ	$\kappa * n$
sn	1	1
$s\overline{n}$	1	2
$\overline{s}n$	0	0
$\overline{s}\,\overline{n}$	0	1

$Bel((\Psi * n) * s) \equiv sn \models n$

Ein konstruktiver Revisionsansatz für OCF's 1/2

Das konstruktive Vorgehen bei den Beispiel-Revisionen $\kappa * A$ können wir folgendermaßen zusammenfassen:

- Alle Modelle von A wurden um den gleichen Betrag C "nach unten" verschoben, also plausibler gemacht, wobei sichergestellt werden musste, dass A in der revidierten OCF den Rang 0 hatte, d.h. es ist $C = \kappa(A)$.
- Alle Modelle von $\overline{A}$ wurden um 1 "nach oben" verschoben, also unplausibler gemacht; damit wurde auf jeden Fall der Rang von $\overline{A}$ positiv.

Ein konstruktiver Revisionsansatz für OCF's 2/2

Damit erhalten wir den folgenden Vorschlag für eine Revisionsvorschrift:

$$\kappa * A(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(A), & \text{wenn } \omega \models A \\ \kappa(\omega) + 1 & , \text{wenn } \omega \models \overline{A} \end{cases}$$

(ergibt für alle Beispiele die gezeigten Revisionen)

mit einem kleinen Schönheitsfehler: Im Fall, dass bereits $\kappa \models A$ gilt, wird κ trotzdem verändert, d.h. auch in diesem Fall gilt dann $\kappa * A \neq \kappa$.

Ein verbesserter Revisionsansatz für OCF's

Um diesen "Schönheitsfehler" zu beheben, muss man die Revisionsvorschrift bei Modellen von $\overline{A}$ davon abhängig machen, ob bereits $\kappa(\overline{A}) > 0$ ist oder nicht;

wir erhalten damit die verbesserte Revisionsvorschrift

$$\kappa * A(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(A) & , \text{ wenn } \omega \models A \\ \kappa(\omega) + \max\{0, -\kappa(\overline{A}) + 1\}, & \text{ wenn } \omega \models \overline{A} \end{cases}$$

Damit haben wir einen allgemeinen AGMes-Revisionsoperator für OCF's, der darüberhinaus noch die folgende Eigenschaft hat:

$$\kappa * A = \kappa \quad \text{gdw.} \quad \kappa \models A$$

Beispiel Somerset & Mills (Forts.)

Wissenszustände der Agenten Somerset und Mills:

Somerset $\rightarrow \kappa_1$, Mills $\rightarrow \kappa_2$

	κ_1	κ_1^*	κ_2	κ_2^*
A	0	1	0	1
B	1	0	7	6
C	5	4	1	0

$\kappa_1(\overline{A}) = 1 = \kappa_2(\overline{A})$

$$\kappa_1^*(\omega) = \kappa_1 * \overline{A}(\omega) = \begin{cases} \kappa_1(\omega) - 1, & \text{wenn } \omega \models \overline{A} \\ \kappa_1(\omega) + 1, & \text{wenn } \omega \models A \end{cases}$$

$$\kappa_2^*(\omega) = \kappa_2 * \overline{A}(\omega) = \begin{cases} \kappa_2(\omega) - 1, & \text{wenn } \omega \models \overline{A} \\ \kappa_2(\omega) + 1, & \text{wenn } \omega \models A \end{cases}$$

OCF – Konditionalisierung

Seien κ eine Rangfunktion, A eine Proposition.

Die A-Konditionalisierung von κ wird definiert durch

$$\kappa(\omega|A) = \kappa(\omega) - \kappa(A) \quad \text{für } \omega \models A$$

$\kappa(\cdot|A)$ ist eine OCF auf $Mod(A)$.

OCF – Beispiel (Forts.)

$\kappa(\omega) = 3$	$p\bar{v}f,\ p\bar{v}\overline{f}$	$p\bar{v}f,\ p\bar{v}\overline{f}$	$\kappa(\omega\|p) = 2$
$\kappa(\omega) = 2$	pvf	pvf	$\kappa(\omega\|p) = 1$
$\kappa(\omega) = 1$	$pv\overline{f},\ \overline{p}v\overline{f}$	$pv\overline{f}$	$\kappa(\omega\|p) = 0$
$\kappa(\omega) = 0$	$\overline{p}vf,\ \overline{p}\,\overline{v}f,\ \overline{p}\,\overline{v}\,\overline{f}$		

$\kappa(p) = 1$

Ein verbesserter Revisionsansatz für OCF's (Forts.)

Mit dieser Schreibweise lässt sich der verbesserte Revisionsansatz wie folgt schreiben:

$$\kappa * A(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega|A) & \text{, wenn } \omega \models A \\ \kappa(\omega|\overline{A}) + \max\{\kappa(\overline{A}), 1\}, & \text{wenn } \omega \models \overline{A} \end{cases}$$

Revision mit komplexerer Information 1/2

Hat man Rangfunktionen zur Verfügung, so lässt sich auch (neue) Information differenzierter ausdrücken:

$$(A, \alpha)$$

repräsentiert die Aussage:

Die Proposition A soll (im neuen Wissenszustand) mit Sicherheit $\alpha (> 0)$ geglaubt werden.

Revision mit komplexerer Information 2/2

D.h., wenn κ a priori-Zustand, $\kappa^* = \kappa * (A, \alpha)$ a posteriori-Zustand, dann soll gelten:

$$\kappa^*(A) = 0 \quad \text{und} \quad \kappa^*(\neg A) = \alpha$$

Damit hat eine Revision von κ mit (A, α) die folgenden Effekte:

- ist $\alpha > \kappa(\overline{A})$, so wird das Wissen in A gestärkt;
- ist hingegen $\alpha < \kappa(\overline{A})$, so wird das Wissen in A abgeschwächt.

OCF-Revision mit (A, α) 1/2

Grundidee: Die Information über A soll die relativen Glaubensgrade im Kontext A bzw. im Kontext $\overline{A}$ nicht verändern, nur die Unterschiede in den jeweiligen Glaubensgraden sollen sich verändern.

Damit können wir die Revision $\kappa * (A, \alpha)$ nun wie folgt definieren:

$$\kappa * (A, \alpha)(\omega) = \begin{cases} \kappa(\omega|A) & \text{wenn } \omega \models A \\ \alpha + \kappa(\omega|\neg A) & \text{wenn } \omega \models \neg A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \kappa(\omega) - \kappa(A) & \text{wenn } \omega \models A \\ \kappa(\omega) + (\alpha - \kappa(\neg A)) & \text{wenn } \omega \models \neg A \end{cases}$$

OCF-Revision mit (A, α) 2/2

$\kappa * (A, \alpha)$ verschiebt die A-Welten und die $\overline{A}$-Welten gegeneinander:

- die A-Modelle werden um $\kappa(A)$ nach unten verschoben;
- die $\neg A$-Modelle werden um $\alpha - \kappa(\neg A)$ (in der Regel) nach oben verschoben,

so dass $\kappa * (A, \alpha)(A) = 0$ und $\kappa * (A, \alpha)(\neg A) = \alpha$ gilt.

OCF – Beispiel (Forts.)

$\kappa(\omega) = 3$	$p\overline{v}f,\ p\overline{v}\overline{f}$	$\overline{p}v\overline{f}$	$\kappa^*(\omega) = 3$
$\kappa(\omega) = 2$	pvf	$p\overline{v}f, p\overline{v}\overline{f}, \overline{p}vf, \overline{p}\,\overline{v}f, \overline{p}\,\overline{v}\overline{f}$	$\kappa^*(\omega) = 2$
$\kappa(\omega) = 1$	$pv\overline{f},\ \overline{p}v\overline{f}$	pvf	$\kappa^*(\omega) = 1$
$\kappa(\omega) = 0$	$\overline{p}vf,\ \overline{p}\,\overline{v}f,\ \overline{p}\,\overline{v}\overline{f}$	$pv\overline{f}$	$\kappa^*(\omega) = 0$
	$\kappa(p) = 1, \kappa(\neg p) = 0$	$\kappa^* = \kappa * (p, 2)$	

Beispiel Somerset & Mills (Forts.)

Wissenszustände der Agenten Somerset und Mills:
Somerset $\rightarrow \kappa_1$, Mills $\rightarrow \kappa_2$
Somerset revidiert mit $(\overline{A}, 1)$, Mills mit $(\overline{A}, 3)$

	κ_1	κ_1^*	κ'^*_1	κ_2	κ_2^*	κ'^*_2
A	0	1	1	0	1	3
B	1	0	0	7	6	6
C	5	4	4	1	0	0

$\kappa_1(\overline{A}) = 1 = \kappa_2(\overline{A})$

$$\kappa'^*_1(\omega) = \kappa_1 * (\overline{A}, 1)(\omega) = \begin{cases} \kappa_1(\omega) - 1, & \text{wenn } \omega \models \overline{A} \\ \kappa_1(\omega) + 1, & \text{wenn } \omega \models A \end{cases}$$

$$\kappa'^*_2(\omega) = \kappa_2 * (\overline{A}, 3)(\omega) = \begin{cases} \kappa_2(\omega) - 1, & \text{wenn } \omega \models \overline{A} \\ \kappa_2(\omega) + 3, & \text{wenn } \omega \models A \end{cases}$$

OCF und AGM-Theorie 1/2

Ist $K = \mathit{Bel}(\kappa)$ die a priori-Wissensmenge, so erhält man eine revidierte Wissensmenge als Wissensmenge einer revidierten Rangfunktion:

$$K * A = \mathit{Bel}(\kappa * (A, \alpha)) \text{ mit } \alpha > 0$$

(wobei $K * A$ unabhängig von der Wahl von $\alpha > 0$ ist).

- Die so definierte Revisionsoperation auf den Wissensmengen von OCF ist eine AGM-Revision, d.h. erfüllt alle AGM-Postulate **(AGM *1)** – **(AGM *8)**.
- Ist $\kappa(A) = 0$, so ist $K * A$ eine AGM-Expansion (s. Übungen).

OCF und AGM-Theorie 2/2

Auch Kontraktionen lassen sich realisieren – zunächst für Rangfunktionen:

$$\kappa - A = \kappa * (\neg A, \kappa(A));$$

dies liefert auf Ebene der Wissensmenge:

$$K - A = \mathit{Bel}(\kappa * (\neg A, \kappa(A)))$$

Für $\kappa^- := \kappa * (\neg A, \kappa(A))$ gilt $\kappa^-(A) = \kappa(A)$ und $\kappa^-(\neg A) = 0$.

Es gilt sogar weiterhin:

Die so definierte Kontraktionsoperation ist eine AGM-Kontraktion, d.h. erfüllt alle Postulate **(AGM -1)** – **(AGM -8)** (s. Übungen).

OCF-Revision und Levi-Identität

Die Levi-Identität der klassischen AGM-Theorie lautet:

$$K * A = (K - \overline{A}) + A;$$

für die OCF-Revision kann man eine viel stärkere Version zeigen:

$$\kappa * (A, \alpha) = (\kappa - \overline{A}) * (A, \alpha)$$

Revision mit konditionaler Information 1/6

Ist es auch möglich, Wissenszustände an neue Revisionsstrategien (= Konditionale) anzupassen?

D.h. sei κ eine OCF –

Wie sieht eine Revision $\kappa * (B|A)$ *aus ?*

Beispiel – Tweety & Co.

Wir betrachten folgende Aussagevariable:

b - bird, f - can_fly, p - penguin, w - has_wings, k - kiwi,

wobei folgende "harte Constraints" gelten:

Pinguine und Kiwis sind Vögel und schließen sich gegenseitig aus.

Wir nehmen zunächst den (naiven) Standpunkt an, dass alle Vögel Flügel haben und fliegen können.

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

In einer OCF κ, die dieses Wissen repräsentiert, müssen also folgende (Un)Gleichungen erfüllt sein:

$$
\begin{aligned}
\kappa(p\overline{b}\dot{f}\dot{k}\dot{w}) &= \infty, \quad \kappa(bf) < \kappa(b\overline{f}),\\
\kappa(\dot{p}\overline{b}\dot{f}k\dot{w}) &= \infty, \quad \kappa(bw) < \kappa(b\overline{w}),\\
\kappa(p\overline{b}\,\overline{f}k\overline{w}) &= \infty.
\end{aligned}
$$

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

ω	$\kappa(\omega)$	ω	$\kappa(\omega)$
$pbf\overline{k}w$	0	$\overline{p}bf\overline{k}w$	0
$pbf\overline{k}\overline{w}$	1	$\overline{p}bf\overline{k}\overline{w}$	1
$pb\overline{f}\,\overline{k}w$	1	$\overline{p}b\overline{f}\,\overline{k}w$	1
$pb\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	2	$\overline{p}b\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	2
$\overline{p}bfkw$	0	$\overline{p}\overline{b}f\overline{k}w$	0
$\overline{p}bfk\overline{w}$	1	$\overline{p}\overline{b}f\overline{k}\overline{w}$	0
$\overline{p}b\overline{f}kw$	1	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}\,\overline{k}w$	0
$\overline{p}b\overline{f}k\overline{w}$	2	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	0

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

In dieser Situation erfahren wir jetzt, dass Pinguine nicht fliegen können, d.h. wir möchten unseren Wissenszustand κ mit der konditionalen Information

$$(\overline{f}|p)$$

revidieren.

Revision mit konditionaler Information 2/6

Offensichtlich soll im revidierten Wissenszustand $\kappa^* = \kappa * (B|A)$ gelten

$$\kappa^* \models (B|A), \quad \text{d.h. } \kappa^*(AB) < \kappa^*(A\overline{B}).$$

Bei der propositionalen Revision hat sich die Idee der Verschiebung von Welten gegeneinander bewährt (Verschiebung = Addition mit linearem Faktor); bei der konditionalen Revision müssen die $A\overline{B}$-Welten gegen die AB-Welten tendentiell nach oben verschoben werden. Die $\overline{A}$-Welten sollten eigentlich nicht verschoben werden.

Revision mit konditionaler Information 3/6

Das führt auf den folgenden Ansatz:

$$\kappa^*(\omega) = \kappa * (B|A)(\omega) = \begin{cases} \kappa_0 + \kappa(\omega) + \kappa^-, & \text{wenn } \omega \models A\overline{B} \\ \kappa_0 + \kappa(\omega) & \text{, wenn } \omega \models \overline{A} \vee B \end{cases}$$

Dabei werden die Fälle $\omega \models AB$ und $\omega \models \overline{A}$ zusammen betrachtet – in beiden Fällen werden die Welten im Prinzip nicht verschoben, wobei diesmal allerdings eventuell eine Normalisierung durch κ_0 notwendig ist.

Revision mit konditionaler Information 4/6

Die Bedingung

$$\kappa^*(AB) < \kappa^*(A\overline{B})$$

impliziert dann folgende Constraints für den Parameter κ^-:

$$\kappa^- > \kappa(AB) - \kappa(A\overline{B})$$

Ist also bereits $\kappa(AB) < \kappa(A\overline{B})$, d.h. $\kappa \models (B|A)$, so wähle $\kappa^- = 0$.
Anderenfalls wähle κ^- minimal, folglich $\kappa^- = \kappa(AB) - \kappa(A\overline{B}) + 1$.
Insgesamt erhalten wir also:

$$\kappa^- = \max\{0, \kappa(AB) - \kappa(A\overline{B}) + 1\}$$

Revision mit konditionaler Information 5/6

Es bleibt noch, die Normalisierungskonstante $\kappa_0 \leq 0$ zu berechnen, damit auch nach der Revision $\kappa^*(\top) = 0$ gilt:

$$\kappa_0 = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } \kappa(AB) < \kappa(A\overline{B}) \\ -\kappa(\overline{A} \vee B) & \text{, wenn } \kappa(AB) \geq \kappa(A\overline{B}) \end{cases}$$

Revision mit konditionaler Information 6/6

Damit erhalten wir insgesamt die folgende

Revisionsvorschrift für $\kappa * (B|A)$:

$$\kappa * (B|A)(\omega) = \begin{cases} \kappa_0 + \kappa(\omega) + \kappa^-, & \text{wenn } \omega \models A\overline{B} \\ \kappa_0 + \kappa(\omega) & \text{, wenn } \omega \models \overline{A} \vee B \end{cases}$$

$$\kappa_0 = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } \kappa(AB) < \kappa(A\overline{B}) \\ -\kappa(\overline{A} \vee B), & \text{wenn } \kappa(AB) \geq \kappa(A\overline{B}) \end{cases}$$

$$\kappa^- = \max\{0, \kappa(AB) - \kappa(A\overline{B}) + 1\}$$

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

b - bird, f - can_fly, p - penguin, w - has_wings, k - kiwi,

wobei folgende "harte Constraints" gelten:

Pinguine und Kiwis sind Vögel und schließen sich gegenseitig aus.

Wir nehmen zunächst den (naiven) Standpunkt an, dass alle Vögel Flügel haben und fliegen können.

In der zugehörigen OCF κ müssen also folgende (Un)Gleichungen erfüllt sein:

$$
\begin{aligned}
\kappa(p\overline{b}\dot{f}\dot{k}\dot{w}) &= \infty, \quad \kappa(bf) < \kappa(b\overline{f}), \\
\kappa(\dot{p}\overline{b}\dot{f}k\dot{w}) &= \infty, \quad \kappa(bw) < \kappa(b\overline{w}), \\
\kappa(p\overline{b}\,\overline{f}k\overline{w}) &= \infty.
\end{aligned}
$$

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

ω	$\kappa(\omega)$	ω	$\kappa(\omega)$
$pbf\overline{k}w$	0	$\overline{p}bf\overline{k}w$	0
$pbf\overline{k}\overline{w}$	1	$\overline{p}bf\overline{k}\overline{w}$	1
$pb\overline{f}\,\overline{k}w$	1	$\overline{p}b\overline{f}\,\overline{k}w$	1
$pb\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	2	$\overline{p}b\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	2
$\overline{p}bfkw$	0	$\overline{p}\overline{b}f\overline{k}w$	0
$\overline{p}bfk\overline{w}$	1	$\overline{p}\overline{b}f\overline{k}\overline{w}$	0
$\overline{p}b\overline{f}kw$	1	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}\,\overline{k}w$	0
$\overline{p}b\overline{f}k\overline{w}$	2	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	0

Wir möchten κ mit $(\overline{f}|p)$ revidieren.

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

ω	$\kappa(\omega)$	$\kappa * (\overline{f}\|p)(\omega)$
$pbf\overline{k}w$	0	2
$pbf\overline{k}\overline{w}$	1	3
$pb\overline{f}\,\overline{k}w$	1	1
$pb\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	2	2

Folgende Konditionale sind z.B. jetzt neu abzuleiten:

$$(\overline{f}|pb\overline{k}w),\ (\overline{f}|pb);$$

wir können immer noch ableiten:

$$(w|b),\ (w|p),\ (w|k).$$

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

Allerdings – Kiwis haben gar keine Flügel, wir möchten nun $\kappa_1^* = \kappa * (\overline{f}|p)$ mit $(\overline{w}|k)$ revidieren.

Es ist

$$\kappa_1^*(kw) = 0,\ \kappa_1^*(k\overline{w}) = 1,\ \kappa_1^*(\overline{k}) = 0,$$

also

$$\begin{aligned} \text{Normalisierungskonstante } \kappa_0 &= 0, \\ \text{Verschiebekonstante } \kappa^- &= \max\{0, 2\} = 2. \end{aligned}$$

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

ω	$\kappa(\omega)$	$\kappa_1^*(\omega)$	$\kappa_1^* * (\overline{w}\|k)(\omega)$
$pbf\overline{k}w$	0	2	2
$pbf\overline{k}\overline{w}$	1	3	3
$pb\overline{f}\,\overline{k}w$	1	1	1
$pb\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	2	2	2
$\overline{p}bfkw$	0	0	2
$\overline{p}bfk\overline{w}$	1	1	1
$\overline{p}b\overline{f}kw$	1	1	3
$\overline{p}b\overline{f}k\overline{w}$	2	2	2

Das Wissen über Pinguine ist gleich geblieben, über Kiwis kann man auch weiterhin ableiten, dass sie fliegen können.

Revision mit Mengen von Konditionalen 1/3

Was wäre, wenn man nun gleichzeitig die beiden Konditionale $(\overline{f}|p), (\overline{w}|k)$ hätte lernen wollen?
Der obige Ansatz lässt sich leicht verallgemeinern:

Sei $\Delta = \{(B_1|A_1), \ldots, (B_n|A_n)\}$ eine Menge von Konditionalen, sei κ eine OCF. Eine Revision von κ mit Δ erhält man mittels

$$\kappa * \Delta(\omega) = \kappa_0 + \kappa(\omega) + \sum_{\omega \models A_i \overline{B_i}} \kappa_i^-,$$

wobei $\kappa_0, \kappa_1^-, \ldots, \kappa_n^- \in \mathbb{N}_0$ so bestimmt werden müssen, dass gilt:

$$\kappa * \Delta(\top) = 0 \text{ und } \kappa * \Delta \models (B_i|A_i), 1 \leq i \leq n \text{ (Success)}.$$

Revision mit Mengen von Konditionalen 2/3

(Success) ist erfüllt gdw. für alle $i, 1 \leq i \leq n$,

$$\kappa_i^- > \min_{\omega \models A_i B_i} \Big(\kappa(\omega) + \sum_{\substack{j \neq i \\ \omega \models A_j \overline{B}_j}} \kappa_j^-\Big) - \min_{\omega \models A_i \overline{B}_i} \Big(\kappa(\omega) + \sum_{\substack{j \neq i \\ \omega \models A_j \overline{B}_j}} \kappa_j^-\Big).$$

Revision mit Mengen von Konditionalen 3/3

Beispiel: Im Tweety & Co.-Beispiel hätte die gleichzeitige Revision der beiden Konditionale, also die Revision mit $\Delta = \{(\overline{f}|p), (\overline{w}|k)\}$, zum gleichen Ergebnis geführt wie die sukzessive Revision (s. Übungen). ♣

Alle solchen Revisionen erfüllen alle bisher vorgestellten Postulate (AGMes) und (CR1)-(CR4)).

Im Allgemeinen liefert allerdings dieser Revisionsansatz kein eindeutiges Revisionsergebnis (auch nicht, wenn die Minimalität der Verschiebefaktoren gefordert wird) !

Prinzip der konditionalen Erhaltung für OCF 1/2

Ein Prinzip der konditionalen Erhaltung war die Grundidee des Ansatzes von Darwiche & Pearl.

Charakteristika von Konditionalen:

- Konditionale sind 3-wertig:

$$(B|A)(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad \omega \models AB \;\; (\textit{Verifikation}) \\ 0 & \text{wenn} \quad \omega \models A\overline{B} \;\; (\textit{Falsifikation}) \\ u & \text{wenn} \quad \omega \models \overline{A} \end{cases}$$

- Die Semantik von Konditionalen ist für OCFs definiert durch Differenzen:

$$\kappa(B|A) = \kappa(AB) - \kappa(A)$$

Beide Charakteristika werden für ein sehr allgemeines Prinzip der konditionalen Erhaltung eingesetzt.

Prinzip der konditionalen Erhaltung für OCF 2/2

Man kann zeigen, dass der obige Ansatz äquivalent ist zur Erfüllung des folgenden Prinzips der konditionalen Erhaltung:

OCF principle of conditional preservation

Let $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ and $\Omega' = \{\omega'_1, \ldots, \omega'_m\}$ be two multi-sets of possible worlds (not necessarily different).
If for each conditional $(B_i|A_i)$ in Δ, Ω and Ω' behave the same, i.e., they show the same number of verifications resp. falsifications, then prior κ and posterior κ^* are balanced by

$$
\begin{aligned}
&(\kappa(\omega_1) + \ldots + \kappa(\omega_m)) - (\kappa(\omega'_1) + \ldots + \kappa(\omega'_m)) \\
&\quad = (\kappa^*(\omega_1) + \ldots + \kappa^*(\omega_m)) - (\kappa^*(\omega'_1) + \ldots + \kappa^*(\omega'_m))
\end{aligned}
$$

Konditionale Strukturen 1/5

Um genauer festlegen zu können, wann sich zwei Mengen $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ und $\Omega' = \{\omega'_1, \ldots, \omega'_m\}$ möglicher Welten bezgl. Δ gleich verhalten, benutzt man den Ansatz der konditionalen Strukturen:

Konditionale Strukturen 2/5

Let $\Delta = \{(B_1|A_1), \ldots, (B_n|A_n)\}$ be a set of conditionals. For each conditional $(B_i|A_i) \in \Delta$ we define two abstract symbols, $\mathbf{a}_i^+$ and $\mathbf{a}_i^-$ such that

- $\mathbf{a}_i^+$ is linked to the *verification* $A_i B_i$ of $(B_i|A_i)$.
- $\mathbf{a}_i^-$ is linked to the *falsification* $A_i \overline{B_i}$ of $(B_i|A_i)$.

We express this by the following function[2]:

Definition 3 (σ_i for each $(B_i|A_i)$)

$$\sigma_i : \Omega \to \{\mathbf{a}_i^+, \mathbf{a}_i^-, 1\} \qquad \sigma_i(\omega) = \begin{cases} \mathbf{a}_i^+ & \text{iff} \quad \omega \models A_i B_i \\ \mathbf{a}_i^- & \text{iff} \quad \omega \models A_i \overline{B}_i \\ 1 & \text{iff} \quad \omega \models \overline{A}_i \end{cases}$$

[2] "iff" means "if and only if"

Konditionale Strukturen 3/5

Conditional structure is defined as the combination of all effects of all conditionals in Δ:

Definition 4 (conditional structure $\sigma(\omega)$)

Let $\Delta = \{(B_1|A_1), \ldots, (B_n|A_n)\}$. The conditional structure of a world $\omega \in \Omega$ is defined as[a]

$$\sigma(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i(\omega) = \prod_{\omega \models A_i B_i} \mathbf{a}_i^+ \cdot \prod_{\omega \models A_i \overline{B}_i} \mathbf{a}_i^-$$

[a] $\prod$ is the product symbol, i.e., $\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

Example

Let $\Delta = \{ \underbrace{(f|b)}_{1}, \underbrace{(\overline{f}|p)}_{2}, \underbrace{(b|p)}_{3} \}$.

$$\sigma(p\,b\,f) = \mathbf{a}_1^+ \mathbf{a}_2^- \mathbf{a}_3^+ \qquad \sigma(\overline{p}\,b\,f) = \mathbf{a}_1^+ \cdot 1 \cdot 1$$

$$\sigma(p\,b\,\overline{f}) = \mathbf{a}_1^- \mathbf{a}_2^+ \mathbf{a}_3^+ \qquad \sigma(\overline{p}\,b\,\overline{f}) = \mathbf{a}_1^- \cdot 1 \cdot 1$$

$$\sigma(p\,\overline{b}\,f) = 1 \cdot \mathbf{a}_2^- \mathbf{a}_3^- \qquad \sigma(\overline{p}\,\overline{b}\,f) = 1 \cdot 1 \cdot 11$$

$$\sigma(p\,\overline{b}\,\overline{f}) = 1 \cdot \mathbf{a}_2^+ \mathbf{a}_3^- \qquad \sigma(\overline{p}\,\overline{b}\,\overline{f}) = 1 \cdot 1 \cdot 11$$

Konditionale Strukturen 4/5

Für Multimengen $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ definieren wir dann

$$\sigma(\Omega) = \prod_{i=1}^{m} \sigma(\omega_i).$$

Zwei Multimengen $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ und $\Omega' = \{\omega'_1, \ldots, \omega'_m\}$ verhalten sich dann bezgl. Δ gleich, wenn gilt:

$$\sigma(\Omega) = \sigma(\Omega').$$

Konditionale Strukturen 5/5

Definieren wir auch noch

$$\kappa(\Omega) = \sum_{i=1}^{m} \kappa(\omega_i)$$

für Multimengen $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, so lässt sich das Prinzip der konditionalen Erhaltung kompakt so ausdrücken:

Prinzip der konditionalen Erhaltung

Gilt für zwei Multimengen $\sigma(\Omega) = \sigma(\Omega')$, so muss auch

$$\kappa(\Omega) - \kappa(\Omega') = \kappa^*(\Omega) - \kappa^*(\Omega')$$

mit $\kappa^* = \kappa * \Delta$ gelten, d.h. priori-Differenz = posteriori-Differenz.

Kapitel 3 – Übersicht

Kapitel 3

3. Revision von Wissenszuständen und konditionalem Wissen

3.5 Revision und induktive Repräsentation

Induktive Wissensrepräsentation

Darunter verstehen wir hier eine Art Wissensvervollständigung, d.h. eine Ableitung neuen Wissens aus gegebenem Wissen, die über die rein deduktive Folgerung hinausgeht.

Dieses Problem ist optimal gelöst dann, wenn man einen Mechanismus gefunden hat, der auf der Basis unvollständigen Wissens für jede mögliche (syntaktisch zulässige) Anfrage eine eindeutige Antwort generiert.

Möchte man hier auch konditionales Wissen miteinbeziehen, so ist dieses Problem äquivalent mit dem Problem, aus einer gegebenen Wissensbasis (mit Fakten und Konditionalen) einen Wissenszustand zu erzeugen.

System Z – Erinnerung

Mit dem System Z haben wir bereits einen solchen Mechanismus kennengelernt: Wir benutzen die durch den Konsistenztest berechnete Partitionierung einer konditionalen Wissensbasis $\Delta = \{r_i : (B_i|A_i)\}_{1 \leq i \leq n}$

$$\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k),$$

und definieren die Rangfunktion κ^z durch

$$\kappa^z(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \omega \text{ keine Regel aus } \Delta \text{ falsifiziert,} \\ \max_{1 \leq i \leq n}\{Z(r_i) \mid \omega \models A_i\overline{B_i}\} + 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $Z(r_i) = j$ gdw. $r_i \in \Delta_j$. (s. Commonsense Reasoning)

Repräsentation und Revision

Und was hat das mit Revision zu tun ?

Aus jeder Revisionsvorschrift für Wissenszustände und Default-Mengen lässt sich ein induktiver Repräsentationsmechanismus für Defaults ableiten, indem man als priori-Wissenszustand den uniformen Wissenszustand benutzt.

Der uniforme Wissenszustand repräsentiert Nichtwissen, Indifferenz etc., d.h. allen möglichen Welten wird der gleiche Wert zugewiesen.

Die uniforme Rangfunktion ist also wie folgt definiert:

$$\kappa_u(\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

Induktive Default-Repräsentation mit OCF's

Sei $\Delta = \{(B_1|A_1), \ldots, (B_n|A_n)\}$ eine konsistente Menge von Konditionalen. Eine induktive Repräsentation von Δ erhält man mittels

$$\kappa_\Delta(\omega) = \sum_{\omega \models A_i \overline{B_i}} \kappa_i^-$$

wobei $\kappa_1^-, \ldots, \kappa_n^-$ so bestimmt werden müssen, dass $\kappa_\Delta \models (B_j|A_j), 1 \leq j \leq n$, gilt,d.h.

$$\kappa_j^- > \min_{\omega \models A_j B_j} \sum_{\substack{i \neq j \\ \omega \models A_i \overline{B_i}}} \kappa_i^- - \min_{\omega \models A_j \overline{B_j}} \sum_{\substack{i \neq j \\ \omega \models A_i \overline{B_i}}} \kappa_i^-$$

(Eine Normalisierung ist wegen der Konsistenz nicht nötig.)

Beispiel Schaltung

ω	κ	$\kappa * (\overline{a} \vee \overline{m})$
am	0	1
$a\overline{m}$	1	0
$\overline{a}m$	2	1
$\overline{a}\,\overline{m}$	3	2

$\kappa = \kappa_\Delta$ mit $\Delta = \{(am|\top), (a\overline{m}|a\overline{m} \vee \overline{a}m), (m|\overline{a})\}$.

Beispiel Tier

ω	κ	$\kappa * f$	κ^*_{alt}
bf	2	1	(1)
$b\overline{f}$	3	$\{2,3,4\}$	(1)
$\overline{b}f$	1	0	(0)
$\overline{b}\,\overline{f}$	0	1	(1)

$\kappa = \kappa_\Delta$ mit $\Delta = \{(\overline{b}\,\overline{f}|\top), (f|b), (\overline{b}f|b \vee f)\}$.

Beispiel Lady

ω	κ	$\kappa * \overline{s}$	κ^*_{alt}
sr	1	0	(2)
$s\overline{r}$	1	2	(1)
$\overline{s}r$	1	0	(0)
$\overline{s}\,\overline{r}$	2	1	(1)

$\kappa = \kappa_\Delta$ mit $\Delta = \{(sr|\top), (s|\overline{r}), (r|\overline{s})\}$.

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

Hier sollten folgende (Un)Gleichungen erfüllt sein:

$$
\begin{aligned}
&\kappa(p\bar{b}\dot{f}\dot{k}\dot{w}) = \infty, \quad && \kappa(bf) < \kappa(b\overline{f}), \\
&\kappa(\dot{p}\bar{b}\dot{f}k\dot{w}) = \infty, \quad && \kappa(bw) < \kappa(b\overline{w}), \\
&\kappa(p\overline{bf}k\overline{w}) = \infty, &&
\end{aligned}
$$

und tatsächlich wurde die ursprüngliche Rangfunktion von der Regelmenge

$$\Delta = \{p \Rightarrow b, k \Rightarrow b, p \Rightarrow \overline{k}, (f|b), (w|b)\}$$

erzeugt.

Beispiel – Tweety & Co. (Forts.)

ω	$\kappa(\omega)$	ω	$\kappa(\omega)$
$pbf\overline{k}w$	0	$\overline{p}bf\overline{k}w$	0
$pbf\overline{k}\overline{w}$	1	$\overline{p}bf\overline{k}\overline{w}$	1
$pb\overline{f}\,\overline{k}w$	1	$\overline{p}b\overline{f}\,\overline{k}w$	1
$pb\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	2	$\overline{p}b\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	2
$\overline{p}bfkw$	0	$\overline{p}\overline{b}f\overline{k}w$	0
$\overline{p}bfk\overline{w}$	1	$\overline{p}\overline{b}f\overline{k}\overline{w}$	0
$\overline{p}b\overline{f}kw$	1	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}\,\overline{k}w$	0
$\overline{p}b\overline{f}k\overline{w}$	2	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}\,\overline{k}\overline{w}$	0

c-Repräsentation und System Z 1/2

Eine solche Art der Repräsentation wird auch als c-Repräsentation (c = conditionals) bezeichnet. Sie verallgemeinert das Strafpunkte-System des System Z in zweierlei Hinsicht:

- statt durch Maximierung werden die Ränge der Welten hier durch Aufsummierung der Strafpunkte berechnet;
- die Strafpunkte werden flexibel durch Betrachtung der Interaktionen der Regeln berechnet.

c-Repräsentationen zeichnen sich durch höchste Qualität der Revisionen und Inferenzen aus.

c-Repräsentation und System Z – Beispiel 1/4

Wir betrachten die folgende Regelmenge Δ:

$r_1 : (f|b)$ *Vögel fliegen.*
$r_2 : (b|p)$ *Pinguine sind Vögel.*
$r_3 : (\overline{f}|p)$ *Pinguine fliegen nicht.*
$r_4 : (w|b)$ *Vögel haben Flügel.*

Für System Z wird die folgende Partitionierung berechnet:

$$\Delta_0 = \{r_1, r_4\},\ \Delta_1 = \{r_2, r_3\};$$

damit erhalten wir die folgende System Z-Darstellung κ_z:

c-Repräsentation und System Z – Beispiel 2/4

ω	r_i fals.	$\kappa_z(\omega)$	ω	r_i fals.	$\kappa_z(\omega)$
$pbfw$	r_3	2	$\overline{p}bfw$	–	0
$pbf\overline{w}$	r_3, r_4	2	$\overline{p}bf\overline{w}$	r_4	1
$pb\overline{f}w$	r_1	1	$\overline{p}b\overline{f}w$	r_1	1
$pb\overline{f}\overline{w}$	r_1, r_4	1	$\overline{p}b\overline{f}\overline{w}$	r_1, r_4	1
$p\overline{b}fw$	r_2, r_3	2	$\overline{p}\overline{b}fw$	–	0
$p\overline{b}f\overline{w}$	r_2, r_3	2	$\overline{p}\overline{b}f\overline{w}$	–	0
$p\overline{b}\,\overline{f}w$	r_2	2	$\overline{p}\overline{b}\overline{f}w$	–	0
$p\overline{b}\,\overline{f}\overline{w}$	r_2	2	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}\overline{w}$	–	0

Wegen $\kappa_z(pw) = 1 = \kappa_z(p\overline{w})$ können wir nicht ableiten, dass auch Pinguine Flügel haben (Drowning Problem).

c-Repräsentation und System Z – Beispiel 3/4

Wir berechnen nun eine minimale c-Repräsentation κ_Δ zu diesem Beispiel mit den Werten

$$\kappa_1^- = \kappa_4^- = 1,\ \kappa_2^- = \kappa_3^- = 2;$$

wir erhalten damit als von Δ induzierte Rangfunktion:

c-Repräsentation und System Z – Beispiel 4/4

ω	r_i fals.	$\kappa_\Delta(\omega)$	ω	r_i fals.	$\kappa_\Delta(\omega)$
$pbfw$	r_3	2	$\overline{p}bfw$	–	0
$pbf\overline{w}$	r_3, r_4	3	$\overline{p}bf\overline{w}$	r_4	1
$pb\overline{f}w$	r_1	1	$\overline{p}b\overline{f}w$	r_1	1
$pb\overline{f}\overline{w}$	r_1, r_4	2	$\overline{p}b\overline{f}\overline{w}$	r_1, r_4	2
$p\overline{b}fw$	r_2, r_3	4	$\overline{p}\overline{b}fw$	–	0
$p\overline{b}f\overline{w}$	r_2, r_3	4	$\overline{p}\overline{b}f\overline{w}$	–	0
$p\overline{b}\,\overline{f}w$	r_2	2	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}w$	–	0
$p\overline{b}\,\overline{f}\overline{w}$	r_2	2	$\overline{p}\overline{b}\,\overline{f}\overline{w}$	–	0

Hier ist nun $\kappa_z(pw) = 1 < 2 = \kappa_z(p\overline{w})$ – damit können wir nun ableiten, dass auch Pinguine Flügel haben.

c-Repräsentation und System Z 2/2

Allerdings gibt es auch Nachteile:

- Es gibt nicht immer eine eindeutige "minimale" Lösung (typischerweise passiert das dann, wenn redundante Information vorliegt, s. Lady-Beispiel).
- Durch die Summation steigt die Berechnungs-Komplexität beträchtlich (NP-hart).

Kapitel 3 –Übersicht

Kapitel 3

3. Revision von Wissenszuständen und konditionalem Wissen

3.6 Multiple Revision

Multiple Revision vs. iterierte Revision

Iterierte Revision und die Postulate (CR1)-(CR4) lösen nicht alle Probleme, im Schaltungsbeispiel scheint das Postulat (CR2) Probleme zu machen:

(CR2) Wenn $B \models \neg A$, dann $\mathit{Bel}((\Psi * A) * B) \equiv \mathit{Bel}(\Psi * B)$.

Ist nämlich $A = am$ (Schaltung okay) und $B = \overline{a}$, so gilt $B \models \neg A$, und folglich würde die Information A bei der iterierten Revision völlig vergessen, d.h., wir würden auch das Wissen über m verlieren.

Das Problem besteht jedoch eher darin, dass die Information "Beide (unabhängigen) Komponenten der Schaltung sind (defaultmäßig) okay" als am modelliert wird und nicht als $\{a, m\}$.

Multiple Revision

Die multiple (iterierte) Revision beschäftigt sich mit der Revision von Wissenszuständen mit Mengen von (plausiblen) Aussagen. Wir schauen uns das wieder für OCFs an, auch hier liefert unser allgemeiner Ansatz von c-Revisionen eine Lösung:

Sei κ eine OCF, und sei $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine endliche, konsistente Menge propositionaler Formeln. Wir fassen alle A_i als plausible Aussagen auf und können daher die A_i mit Konditionalen $(A_i|\top)$ identifizieren; hier liefert unser allgemeiner Ansatz folgendes Schema für eine Revision $\kappa^* = \kappa * \mathcal{S}$:

$$\kappa^*(\omega) = \kappa_0 + \kappa(\omega) + \sum_{\substack{i=1 \\ \omega \models \overline{A_i}}}^{n} \kappa_i^-,$$

$$\kappa_i^- > \min_{\omega \models A_i}\{\kappa(\omega) + \sum_{\substack{j \neq i \\ \omega \models \overline{A_j}}} \kappa_j^-\} - \min_{\omega \models \overline{A_i}}\{\kappa(\omega) + \sum_{\substack{j \neq i \\ \omega \models \overline{A_j}}} \kappa_j^-\}.$$

Multiple c-Revisionen 1/2

Für den Fall der propositionalen (multiplen) c-Revisionen ergeben sich zunächst Vereinfachungen:

Proposition 1

Sei $\kappa^* = \kappa * \mathcal{S}$ eine propositionale c-Revision von κ mit $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ wie oben gegeben. Dann gilt:

- $\kappa_0 = -\kappa(S) = -\kappa(A_1 \ldots A_n)$, *und*
- *für jedes $A_i \in \mathcal{S}$ gilt:*

$$\min_{\omega \models A_i} \{\kappa(\omega) + \sum_{\substack{j \neq i \\ \omega \models \overline{A_j}}} \kappa_j^-\} = \kappa(A_1 \ldots A_n).$$

Multiple c-Revisionen 2/2

Wir können also unseren Ansatz wie folgt zusammenfassen:

Propositionale C-revisionen für OCFs

Sei κ eine OCF, und sei $\mathcal{S} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Menge von Propositionen. Dann hat eine *propositionale c-Revision von κ mit $\mathcal{S}$* die folgende Form:

$$\kappa * \mathcal{S}(\omega) = \kappa^*(\omega) = -\kappa(A_1 \ldots A_n) + \kappa(\omega) + \sum_{\substack{i=1 \\ \omega \models \overline{A_i}}}^{n} \kappa_i^- \qquad (1)$$

mit nicht-negativen ganzen Zahlen κ_i^-, für die gilt:

$$\kappa_i^- > \kappa(A_1 \ldots A_n) - \min_{\omega \models \overline{A_i}} \{\kappa(\omega) + \sum_{\substack{j \neq i \\ \omega \models \overline{A_j}}} \kappa_j^-\}. \qquad (2)$$

Multiple Revision – Beispiel

$\kappa \models \overline{a}\overline{b}$; $\mathcal{S} = \{a, b\}$:

ω	$\kappa(\omega)$	$\kappa * \mathcal{S}(\omega)$	$(\kappa * \mathcal{S})_{min}(\omega)$	$\kappa * ab(\omega)$	$(\kappa * ab)_{min}(\omega)$
ab	4	$-4 + \kappa(\omega)$	0	$-4 + \kappa(\omega)$	0
$a\overline{b}$	1	$-4 + \kappa(\omega) + \kappa_2^-$	1	$-4 + \kappa(\omega) + \kappa^-$	2
$\overline{a}b$	1	$-4 + \kappa(\omega) + \kappa_1^-$	1	$-4 + \kappa(\omega) + \kappa^-$	2
$\overline{a}\overline{b}$	0	$-4 + \kappa(\omega) + \kappa_1^- + \kappa_2^-$	4	$-4 + \kappa(\omega) + \kappa^-$	1

Kapitel 3 – Übersicht

Kapitel 3

3. Revision von Wissenszuständen und konditionalem Wissen

3.7 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung 1/2

- Die AGM-Theorie ist ein wichtiger Kriterienkatalog für alle Wissensänderungen.
- Mittels Rangfunktionen lässt sich eine einfache Umsetzung der AGM-Postulate in einem epistemischen Rahmen realisieren (Prinzip der minimalen Modelle).
- Rangfunktionen sind gute Repräsentationen von Wissenszuständen; sie lassen sich insbesondere in epistemische Verwurzelungsfunktionen transformieren und umgekehrt.

Zusammenfassung 2/2

- Bei der iterierten Revision von Wissenszuständen ist es wichtig, die Änderung des konditionalen Wissens zu steuern.
- Das Prinzip der konditionalen Erhaltung lässt sich (bei qualitativen Wissenszuständen) durch einen "Verschiebemechanismus" optimal realisieren.

Implementationen und Anwendungen

- Das System SATEN führt Wissensrevisionen verschiedenen Typs auf Verwurzelungsfunktionen durch.
- Es gibt Algorithmen für c-Repräsentationen (falls eine eindeutige Lösung existiert).

Gebiete, in denen die Revisionstheorie immer stärkeren Eingang findet und Pragmatismen ablöst, sind

- Kognitive Robotik, Agenten und Multi-Agentensysteme (Action and Change);
- Datenbanken und Informationssysteme;
- Ontologien.