Fortgeschrittene Themen der Wissensrepräsentation

Gabriele Kern-Isberner
LS 1 – Information Engineering

TU Dortmund
Sommersemester 2015

Kapitel 0 – Einführung, Organisatorisches und Themenübersicht

Kapitel 0

Einführung, Organisatorisches und Themenübersicht

Fortgeschrittene Themen der Wissensrepräsentation (FTdW) 1/2

- Vertiefungsmodul im Master mit 3V + 1Ü SWS
- Übungen finden im 2 SWS-Block statt (ca. alle 2 Wochen)
  - Der Termin der nächsten Übung wird in der Vorlesung angekündigt und ist auch auf dem aktuellen Übungsblatt zu finden.
  - Es gibt keine Studienleistungen und keine Korrekturen von Abgaben.
  - Es wird allerdings erwartet, dass Sie (im Allgemeinen) die Vorlesungen nach- und die Übungen vorbereiten, (Ideen zu) Lösungen der Aufgaben in den Übungen vorstellen und an den Diskussionen teilnehmen.
- Prüfungen finden in mündlicher Form statt nach Terminvereinbarung (bitte spätestens ca. 4-6 Wochen vor dem gewünschten Termin den genauen Termin vereinbaren)

Fortgeschrittene Themen der Wissensrepräsentation (FTdW) 2/2

Die Veranstaltung FTdW ist als Ergänzung/Spezialisierung der Vorlesungen

- “Darstellung, Verarbeitung und Erwerb von Wissen” (*DVEW*, Bachelor) und
- “Commonsense Reasoning” (*CR*, Master)

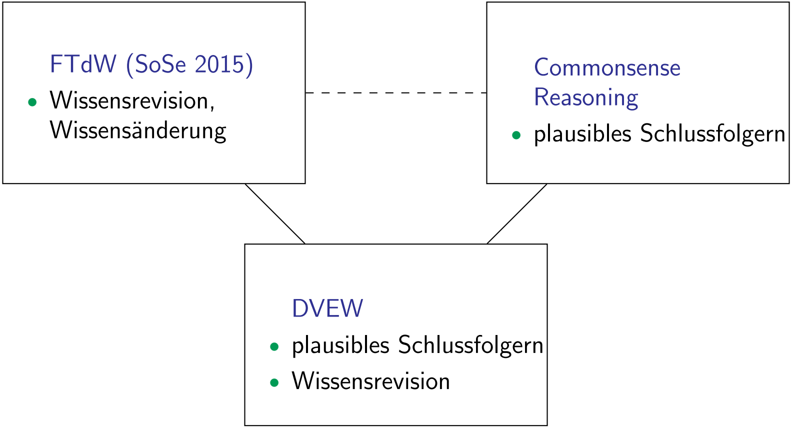
gedacht, daher sind Vorkenntnisse im Bereich der Wissensrepräsentation nützlich (aber nicht notwendig!), insbesondere in den folgenden Gebieten:

- Klassische und nichtklassische Logiken (DVEW);
- Wahrscheinlichkeiten und probabilistische Logik (DVEW);
- Plausibilitätsrelation (präferentielle Modelle) und Rangfunktionen (ordinale konditionale Funktionen, OCF) (CR);
- unsichere Regeln (DVEW), Konditionale (CR).

Sie sollten aber den (wichtigen) Cn-Operator kennen!

(s. z.B. Übungen zu DVEW, Blatt 1)

FTdW und DVEW/ Commonsense Reasoning



FTdW im SoSe 2015 1/2

FTdW vertieft aktuelle Themen der Wissensrepräsentation, im SoSe 2015 wird es vor allem um Wissensänderungen gehen, später auch um Belief Merging und Informationsfusion:

- Intelligente/Smarte Anwendungen drängen immer stärker ins "normale" Leben ($\rightarrow$ Unsicherheiten, Dynamik).
- Im Geschäftsleben werden Ontologien und Regel-Systeme immer stärker eingesetzt (beide können in der Regel nicht gut bzw. gar nicht mit Unsicherheiten und Änderungen umgehen!)
- In vielen Bereichen besteht mittlerweile ein information overload – zuviele, widersprüchliche Informationen, wie soll man daraus Nutzen ziehen?

Wissensänderungstheorie – wozu?

“Unsicherheiten, Änderungen gibt es doch immer, das ist mir zu unbestimmt, ich verlass mich lieber auf sichere Methoden, da weiß ich, was ’rauskommt.”

Klar, aber man weiß nicht, ob der Output in der Realität noch passt.

“Ändern ist doch einfach, altes ’raus, neues ’rein.”

Und was macht man, wenn es Abhängigkeiten zwischen “Altem” und “Neuem” gibt?

Ändern ist tatsächlich einfach – solange man sich nicht um die Konsequenzen kümmern muss!

FTdW im SoSe 2015 2/2

In der Wissensrevision[1] geht es vor allen Dingen um Qualitätssicherung von Änderungsoperationen (mit Hilfe von Logik) und um (semantische und syntaktische) Strategien zur Wissensänderung, die Qualitätsanforderungen genügen:

- Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)
- AGM – reicht das? Erweiterte Revisionsansätze
- Revision von Wissensbasen
- Wissensänderungen in der Probabilistik
- (Kognitive Aspekte der Wissensrevision)
- Informationsfusion und Belief merging (Wissensverschmelzung)

[1] Revision wird oft als allgemeine Bezeichnung für Änderung benutzt.

Revision, Merging und Fusion

- Revision:

  $$\text{Wissen } *_{rev} \text{ neue Informationen} \rightarrow \text{neues Wissen}$$

  In der Regel wird die neue Information geglaubt; anderenfalls spricht man von nicht-priorisierter Wissensrevision.

- Merging/Fusion:

  $$\text{Information } *_{fus} \text{ Information} \rightarrow \text{Information/Wissen}$$

  Aus verschiedenen, möglicherweise widersprüchlichen Informationen entsteht sinnvolles, nutzbares Wissen
  $\rightarrow$ Form der nicht-priorisierten Wissensrevision.

Kapitel 1 – Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

Kapitel 1

Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

Kapitel 1 – Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

1. Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

1.1 Einführung

Beispiel Prüfung

Agent A glaubt[2]:

Wer fleißig lernt, macht gute Prüfungen.

Miriam lernt fleißig.

Miriam wird (wohl) eine gute Prüfung machen.

Die harte Realität:

Miriam hat die Prüfung nicht bestanden.

[2] "Glauben" wird hier immer als "subjektives Wissen" verstanden.

Wissensänderung

Wissensänderung ...

- ... beschäftigt sich mit dem Prozess, aktuelles Wissen zu modifizieren, um neue Information aufzunehmen; (wichtig für jedes intelligente System!); dieser Prozess wird allgemein als Wissensrevision bezeichnet.
- ... ist im Prinzip beschreibbar durch eine Funktion, die einen Wissenszustand gemeinsam mit einer neuen Information auf einen Wissenszustand abbildet.
- ... ist ein epistemischer Prozess – das Wissen eines Agenten soll modifiziert werden.
- ... behandelt folglich (meistens) subjektives Wissen (engl. belief), im Gegensatz zum *objektiven Wissen* (engl. *knowledge*).

Beispiel Phantomzug

Bahnhof Heimstadt, Montag morgen, 7:30h:
Ein (mehr oder weniger) intelligentes System zur Anzeige der (mehr oder weniger) pünktlichen Abfahrt von Zügen an einer bestimmten Haltestelle meldet eine wachsende Verspätung des RE 007 (planmäßige Abfahrt 7:50h). Agent B, ein erfahrener Bahnfahrer, beobachtet das besorgt, da er heute wegen einer Prüfung pünktlich an der Uni sein muss.

7:45h: Mittlerweile hat sich die angezeigte Verspätung auf 20 Minuten erhöht. Dadurch würde Agent B seinen Anschluss verpassen. Er glaubt nun, dass es besser ist, auf einen Bus auszuweichen oder ein Taxi zu nehmen, und wendet sich zum Gehen.

7:49h: Ganz pünktlich fährt RE 007 ein.

Was macht bzw. glaubt B?

Beispiel Apteryx (Kiwi)

Der kleine Agent C glaubt, dass alle Vögel (im Prinzip) fliegen können.
Als er etwas älter geworden ist, sieht er zum ersten Mal Kiwis auf einer Neuseelandreise und beobachtet, dass diese Vögel nicht fliegen.
Durch genauere Betrachtung stellt er fest, dass Kiwis keine Flügel zu haben scheinen, und folgert, dass Kiwis nicht fliegen, weil sie keine Flügel haben.
Allerdings sagt ihm der kluge Agent D, dass Kiwis doch kleine, verkümmerte Flügel haben.

Was glaubt Agent C?

Beispiel Apteryx

3

[3] Quelle: Wikipedia

Beispiel Apteryx

[4]

[4] Quelle: Schild im Kiwi Birdlife Park, Queenstown NZ, Foto: M.-B. Isberner

Grundsätzliche Probleme 1/2

- Wie ist das Wissen repräsentiert?
  Hier sind (mindestens) drei Repräsentationsformen denkbar:
  - als deduktiv abgeschlossene Menge von Formeln (Wissensmenge);
  - als Wissensbasis, d.h. als nicht deduktiv abgeschlossene Menge von Formeln, aus denen Wissen abgeleitet werden kann;
  - als Wissenszustand, d.h. neben logischen Formeln enthält der Wissenszustand auch extra-logische Informationen, z.B. über Präferenzen des Agenten oder Glaubensgrade.
- Gibt es einen Unterschied zwischen explizit repräsentiertem Wissen und implizit abgeleitetem Wissen? Wie genau sind diese beiden Arten von Wissen miteinander verbunden?

Grundsätzliche Probleme 2/2

- Inkonsistenzen zwischen altem und neuem Wissen müssen aufgelöst werden (aus einer inkonsistenten Wissensbasis kann logisch *alles* gefolgert werden!)
- Bisheriges Wissen muss aufgegeben werden – aber welches? Hier sind extra-logische Informationen notwendig, um Strategien zu entwickeln.
- Das neue Wissen soll in direktem Zusammenhang mit dem bisherigen Wissen und der neuerworbenen Information stehen. (Die Tatsache, dass Kiwis nicht fliegen, soll Agent C nicht veranlassen zu glauben, dass Vögel keine Füsse haben, dass Autos fliegen, oder dass es auf dem Mars Tiger gibt.)

Grundsätzliche Anforderungen

- Das Wissen soll (wenn immer möglich) unter der Revision konsistent bleiben.
- Der Typ des Wissens soll unter der Revision erhalten bleiben.
- Formeln, die aus dem Wissen deduktiv ableitbar sind, sollen auch zum Wissen gehören.
- Der Verlust an Information soll unter der Revision minimal sein (Minimal-change-Paradigma).
- Unter der Revision soll nur Wissen aufgegeben werden, dass so wenig grundlegend wie möglich ist (epistemic entrenchment = epistemische Verwurzelung).

Beispiel Prüfung (Forts.)

Agent A's Wissensbasis:

$$\mathit{Fleissig\_gelernt} \Rightarrow \mathit{Pruefung\_gut}, \quad \mathit{Fleissig\_gelernt}$$

Agent A's Wissenszustand bzw. Wissensmenge:

$$Cn(\{\mathit{Fleissig\_gelernt} \Rightarrow \mathit{Pruefung\_gut}, \quad \mathit{Fleissig\_gelernt}\})$$

Agent A folgert nun:

$$\mathit{Pruefung\_gut} \in Cn(\{\mathit{Fleissig\_gelernt} \Rightarrow \mathit{Pruefung\_gut}, \quad \mathit{Fleissig\_gelernt}\})$$

Um dieses (abgeleitete) Wissen zu revidieren, muss er (im Konfliktfall)

$$\mathit{Fleissig\_gelernt} \Rightarrow \mathit{Pruefung\_gut} \quad \text{oder} \quad \mathit{Fleissig\_gelernt}$$

aufgeben.

Wissensmenge und Wissenszustand

Darstellung von Wissenszustand und Wissensmenge hängen vom gewählten logischen Rahmen (genauer: der logischen Sprache) ab.

Beispiele für Wissenszustände:

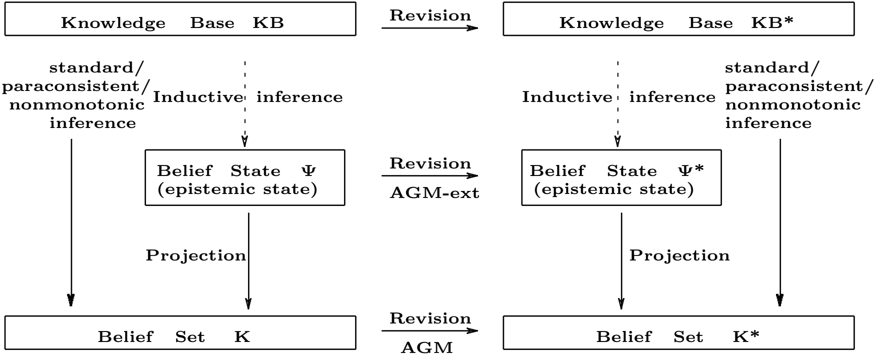
- deduktiv abgeschlossene Menge klassisch-logischer Formeln;
- Menge von Formeln mit Präferenz- oder Plausibilitätsordnung;
- Wahrscheinlichkeitsverteilung;
- Bayessches Netz.

Beispiel Wissenszustand

Ein Wissenszustand könnte (in Abhängigkeit von der gewählten Repräsentationsart) die folgenden Aussagen enthalten:

- $\mathit{Pinguin} \rightarrow \neg \mathit{fliegt} \;<_{plaus}\; \mathit{Vogel} \rightarrow \mathit{fliegt}$
(qualitative Plausibilität)
- $\mathit{Pinguin} \rightarrow \neg \mathit{fliegt}\,[2], \mathit{Vogel} \rightarrow \mathit{fliegt}\,[1]$
(quantitative/logarithmische Plausibilität)
- $\mathit{Pinguin} \rightarrow \neg \mathit{fliegt}\,[0.99], \mathit{Vogel} \rightarrow \mathit{fliegt}\,[0.9]$
(Wahrscheinlichkeiten)

Wissensrepräsentation und -revision 1/2



Wissensrepräsentation und -revision 2/2

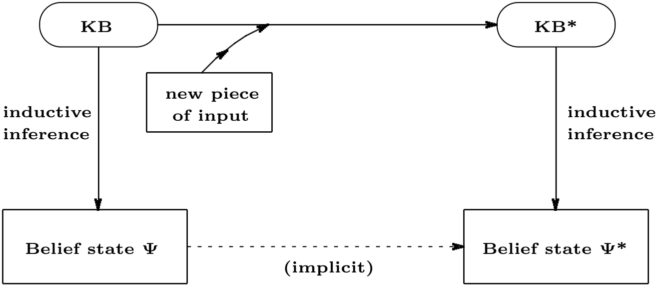
- Wissensbasis → Wissenszustand via induktiver Inferenz: Hier hat die induktive Inferenz die Aufgabe, das partielle Wissen der Wissensbasis möglichst weitgehend zu vervollständigen (Beispiel: Probabilistische Netze, insb. Prinzip der maximalen Entropie in der Probabilistik).
- Wissenszustand → Wissensmenge via Projektion: Aus dem Wissenszustand wird das plausibelste Wissen extrahiert.
- Wissensbasis → Wissensmenge via klassischer/parakonsistenter/nichtmonotoner Inferenz: Im einfachsten Fall wird einer Menge klassischer Formeln der deduktive Abschluss zugeordnet; es sind aber auch z.B. Default-Inferenzen oder die Bildung von Antwortmengen denkbar.

Ansatzpunkte für die Revision

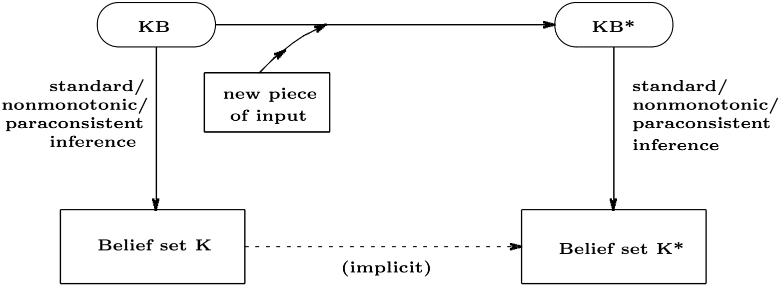
In Abhängigkeit davon, wie das Wissen repräsentiert wird, kann man mehrere Ansatzpunkte für die Wissensrevision unterscheiden:

- Basisrevision (oder direkte Revision): Hier erfolgt die Revision durch Änderung der Wissensbasis, also des explizit repräsentierten Wissens. Im einfachsten Fall werden Formeln hinzugefügt oder weggelassen, und alles weitere wird der Inferenzmaschine überlassen.
- Zustandsrevision: Hier wird die Revision auf dem Wissenszustand durchgeführt, d.h. es sind komplexe Operationen nötig, die auch Glaubensgrade etc. verändern.
- Wissensmengenrevision: Hier wird nur das sicherste Wissen (i. Allg. eine Menge klassischer Formeln) betrachtet und geändert.

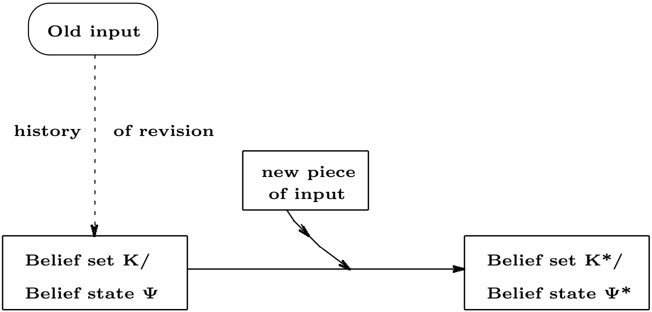
Basisrevision I



Basisrevision II



Zustands- und Wissensmengenrevision



Wissensrevision – Methoden und Strategien

Prinzipiell gibt es zwei Möglichkeiten, Wissensrevision zu kontrollieren:

- Logisch-beschreibender Ansatz: Es wird erwartet, dass der Revisionsprozess gewissen Rahmenbedingungen (Postulaten, Qualitätskriterien) genügen muss.
- Konstruktiver Ansatz: Es werden explizit Strategien angegeben, wie die Wissensrevision auszuführen ist. Dafür sind aber in der Regel zusätzliche Informationen über das Wissen notwendig, und die Sicherstellung von Qualitätskriterien ist wichtig.

Basis-Typen der Wissensänderung

- Expansion: Die neue Information A ist kompatibel (konsistent) mit dem bisherigen Wissen K, d.h. das bisherige Wissen kann ohne Probleme um die neue Information erweitert werden.
- Revision: Die neue Information A steht im Konflikt (Widerspruch) mit dem bisherigen Wissen K, d.h. zur Integration der neuen Information (unter Wahrung der Konsistenz des Wissens (s.o.)!) werden komplexere Operationen notwendig sein; insbesondere wird der Agent gezwungen sein, bisheriges Wissen aufzugeben.
- Kontraktion: Die neue Information besteht darin, gewisse Teile (A) des etablierten Wissens K zu vergessen, ohne dass neues Wissen (z.B. $\neg A$) eingefügt wird.

A priori und a posteriori

Folgende Sprechweise ist bei Wissensänderungen üblich, um die Zustände "vorher – nachher" genauer auseinanderhalten zu können:

K	(a) priori-Wissen	Wissen vor der Änderung
K'	(a) posteriori-Wissen	Wissen nach der Änderung

Zunächst werden wir uns mit Revision im engeren Sinne (AGM-Theorie) im klassisch-logischen Rahmen beschäftigen.

Kapitel 1

1. Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

1.2 AGM-Revisionstheorie

AGM Revision 1/2

Literatur:

- C.E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and P. Makinson. On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50(2):510–530, 1985.
- P. Gärdenfors and H. Rott. Belief revision. In D.M. Gabbay, C.H. Hogger, J.A. Robinson, eds., *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, pages 35–132. Oxford University Press, 1994.

AGM Revision 2/2

Ein einfaches Revisions-Szenario ...

- Das Wissen des Agenten und die neue Information lassen sich durch aussagenlogische Formeln ausdrücken.
- Das priori-Wissen K ist eine aussagenlogische, deduktiv abgeschlossene Formelmenge (d.h. Wissensmenge = Wissenszustand (belief set))

$$K = Cn(K)$$

- Auch die (modifizierte) posteriori-Wissensmenge K' soll eine aussagenlogische, deduktiv abgeschlossene Formelmenge sein.

Die AGM-Theorie behandelt die klassischen Revisionsarten Expansion, Revision und Kontraktion.

Wissensbasis vs. Wissensmenge

Der Begriff der Wissensmenge ist zentral für die AGM-Theorie und wird vom Begriff der Wissensbasis abgegrenzt:

Definition 1 (Wissensmenge)

Sei $\mathcal{L}$ eine aussagenlogische Sprache. Eine Menge $K \subseteq \mathcal{L}$ ist eine Wissensbasis. K heißt Wissensmenge, wenn sie deduktiv abgeschlossen ist, d.h., wenn $K = Cn(K)$ gilt.

AGM-Expansion

Expansion: Die neue Information A ist kompatibel (konsistent) mit dem bisherigen Wissen K, d.h. die neue Information kann ohne größere Probleme in das bisherige Wissen integriert werden.

K a priori-Wissen, A neue Information, $K \cup \{A\}$ konsistent

$\boxed{K{+}A \text{ – Expansion von } K \text{ um } A}$

Welche Eigenschaften soll $K + A$ erwartungsgemäß erfüllen?

AGM-Postulate für Expansion

(AGM $+1$) $K + A$ ist eine Wissensmenge.

(AGM $+2$) $A \in K + A$ (Success).

(AGM $+3$) $K \subseteq K + A$.

(AGM $+4$) Wenn $A \in K$, dann $K + A = K$.

(AGM $+5$) Wenn $K \subseteq H$, dann $K + A \subseteq H + A$ (Monotonie).

(AGM $+6$) $K + A$ ist die kleinste Wissensmenge, so dass (AGM $+1$) - (AGM $+5$) erfüllt sind.

AGM-Expansion – Charakterisierung

Theorem 2 (Gärdenfors & Rott 94)

Die Expansionsfunktion + erfüllt (AGM +1) - (AGM +6) gdw.[a]

$$\boxed{K + A = Cn(K \cup \{A\})}$$

[a] gdw. = genau dann, wenn, im Englischen *iff* = *if and only if*.

AGM-Expansion – allgemein

Bemerkung: Die obige Definition für $K + A$ ergibt auch dann Sinn, wenn A nicht mit K konsistent ist; in diesem Fall erhalten wir $K + A = \mathcal{L}$. Wir definieren daher allgemein:

$$K + A = Cn(K \cup \{A\})$$

AGM-Expansion – Beispiel

Beispiel (Prüfung):

$$K = Cn(\{\mathit{Fleissig\_gelernt} \Rightarrow \mathit{Pruefung\_gut}\}),$$
$$A = \mathit{Fleissig\_gelernt}$$

$K + A = Cn(\{\mathit{Fleissig\_gelernt} \Rightarrow \mathit{Pruefung\_gut}, \mathit{Fleissig\_gelernt}\})$,
also $\mathit{Pruefung\_gut} \in K + A$. ♣

AGM-Revision

K a priori-Wissen, A neue Information, $K \cup \{A\}$ nicht notwendigerweise konsistent

$K * A$ – Revision von K durch A

Beispiel (Prüfung):

$$K = Cn(\{\mathit{Fleissig\_gelernt} \Rightarrow \mathit{Pruefung\_gut}, \mathit{Fleissig\_gelernt}\}),$$
d.h. $\mathit{Pruefung\_gut} \in K$

$$A = \neg \mathit{Pruefung\_gut} \quad \mathit{Widerspruch}!$$

Welches Wissen soll aufgegeben werden?

$\mathit{Fleissig\_gelernt} \Rightarrow \mathit{Pruefung\_gut}$ oder $\mathit{Fleissig\_gelernt}$?

AGM-Postulate für Revision 1/3

(AGM *1) $K * A$ ist eine Wissensmenge.

(AGM *2) $A \in K * A$. (Success)
Dieses Postulat fordert, dass die neue Information auch tatsächlich in das Wissen aufgenommen wird.Damit wird der neuen Information – obwohl sie dem bisherigen Wissen widerspricht – absolute Priorität eingeräumt, d.h. die Revisionsoperation ist asymmetrisch.

(AGM *3) $K * A \subseteq K + A$.
Die Revisionsoperation soll nicht mehr Wissen "erzeugen", als durch eine Expansion erfolgt wäre.

(AGM *4) Wenn $\neg A \notin K$, dann $K + A \subseteq K * A$.
Wenn die neue Information dem bisherigen Wissen nicht widerspricht, so soll die Expansion in der Revision enthalten sein.

AGM-Postulate für Revision 2/3

Bemerkung: Aus (AGM *3) und (AGM *4) folgt:

Wenn $\neg A \notin K$, dann $K + A = K * A$.

(AGM *5) $K * A$ ist genau dann inkonsistent, wenn A widersprüchlich ist.

Das gilt sogar dann, wenn $K = \mathcal{L}$, also inkonsistent ist!
Das Ziel einer Revision ist prinzipiell die Herstellung einer konsistenten Wissensmenge. Als einzige Ausnahme von diesem Prinzip wird der Fall zugelassen, dass die neue Information selbst inkonsistent ist; (nur) in diesem Fall ist es nicht sinnvoll, durch Revision zu einer konsistenten Wissensmenge zu kommen.

AGM-Postulate für Revision 3/3

(AGM *6) Gilt $A \equiv B$, dann gilt auch $K * A = K * B$.
Das Ergebnis der Revision soll vom logischen "Inhalt" bestimmt werden, nicht von der syntaktischen Form.

(AGM *7) $K * (A \wedge B) \subseteq (K * A) + B$.
Dieses Postulat erlaubt die Abschätzung des Revisionsergebnisses, wenn mehrere Informationen eingearbeitet werden sollen. Die neue Wissensmenge $K * (A \wedge B)$ soll nicht über die Expansion von $K * A$ um B hinausgehen. Dieses Postulat ist symmetrisch in A und B!

(AGM *8) Ist $\neg B \notin K * A$, dann gilt: $(K * A) + B \subseteq K * (A \wedge B)$.
Ist B mit der revidierten Wissensmenge $K * A$ konsistent, so soll das um B expandierte Wissen auf jeden Fall in dieser Wissensmenge enthalten sein.

AGM-Revisionspostulate 1/2

(AGM *1) $K * A$ ist eine Wissensmenge.

(AGM *2) $A \in K * A$. (Success)

(AGM *3) $K * A \subseteq K + A$.

(AGM *4) Wenn $\neg A \notin K$, dann $K + A \subseteq K * A$.

(AGM *5) $K * A$ ist inkonsistent gdw. A widersprüchlich ist.

(AGM *6) Gilt $A \equiv B$, dann gilt auch $K * A = K * B$.

(AGM *7) $K * (A \wedge B) \subseteq (K * A) + B$.

(AGM *8) Ist $\neg B \notin K * A$, dann gilt: $(K * A) + B \subseteq K * (A \wedge B)$.

Die Postulate **AGM *1 - *6** heißen auch AGM-Basispostulate für die Revision.

AGM-Revisionspostulate 2/2

Gilt in der AGM-Theorie die folgende Behauptung:

$$\text{Wenn } A \in K, \text{ dann } K * A = K \text{ ?}$$

Das gilt nur, wenn K konsistent ist!

AGM-Revisionstheorie 1/3

Anders als im Fall der Expansion reichen die AGM-Postulate nicht aus, um eine Revisionsoperation eindeutig zu beschreiben!

Es gibt also viele mögliche, mit der AGM-Theorie verträgliche Revisionen.

AGM-Revision – Beispiel

A	*(Der Vogel auf dem See ist ein) Schwan.*
B	*(Der See liegt in) Schweden.*
$B \Rightarrow C$	*Schweden ist ein Teil von Europa.*
$A \wedge C \Rightarrow D$	*Alle europäischen Schwäne sind weiss.*

a priori-Wissen: $K = Cn(\{A, B,\ B \Rightarrow C,\ A \wedge C \Rightarrow D\})$

neue Information (durch Beobachtung): $\neg D$

Mögliche Revisionen:

$$K * (\neg D) = \begin{cases} Cn(\{\neg D, B, B \Rightarrow C, A \wedge C \Rightarrow D\}) \\ Cn(\{\neg D, A, B \Rightarrow C, A \wedge C \Rightarrow D\}) \\ Cn(\{\neg D, A, B, A \wedge C \Rightarrow D\}) \end{cases}$$

AGM-Revisionstheorie 2/3

Unter der Annahme, dass die Basispostulate gelten, kann man zeigen:

- **AGM *7** ist äquivalent zu

$$(K * A) \ \cap \ (K * B) \subseteq K * (A \vee B)$$

- **AGM *8** ist äquivalent zu

$$\text{Wenn } \neg A \notin K * (A \vee B), \text{dann } K * (A \vee B) \subseteq K * A$$

AGM-Revisionstheorie 3/3

Unter der Annahme, dass die Basispostulate gelten, kann man zeigen:

- Die Konjunktion von **AGM *7** und **AGM *8** ist äquivalent zu

$$
\begin{array}{ll}
 & K * (A \vee B) = K * A \\
\text{oder} & K * (A \vee B) = K * B \\
\text{oder} & K * (A \vee B) = K * A \cap K * B
\end{array}
$$

- **AGM *7** und **AGM *8** gemeinsam implizieren

$$K * A = K * B \text{ gdw. } B \in K * A \text{ und } A \in K * B$$

(s. Übungen)

AGM-Revision – eine schwache Revision?

Wenn auch die AGM-Revisionspostulate in vielen Fällen eine nützliche Hilfe für die Wissensrevision geben, so ist doch der von ihnen gesteckte Rahmen recht weit ...

Beispiel: Die folgende Revision ist eine AGM-Revision im Sinne der 8 Postulate (s. Übungen):

$$K * A = \begin{cases} Cn(K \cup \{A\}) & : K \cup \{A\} \text{ konsistent} \\ Cn(\{A\}) & : K \cup \{A\} \text{ inkonsistent} \end{cases}$$

♣

AGM-Kontraktion

Kontraktion: Die neue Information besteht darin, gewisse Teile des etablierten Wissens K zu vergessen, ohne dass neues Wissen eingefügt wird. K a priori-Wissen, A Wissen, das vergessen werden soll.

$K - A$ – Kontraktion von A aus K

Ein Anwendungsbereich, in dem z.B. die Kontraktion bei der Revision eine wichtige Rolle spielt, um die Widerspruchsfreiheit zu erhalten, ist die Änderung von Gesetzestexten bzw. Vorschriften.

AGM-Kontraktion – Beispiel

In der Familie Smith gelten strenge Regeln – Vater Ted hat folgendes angeordnet:

- Die Kinder dürfen nur fernsehen, wenn sie vorher ihr Abendbrot aufgegessen haben.
- Die Kinder bekommen nur dann Abendbrot, wenn sie ihre Hausaufgaben gemacht haben.

Als Folge davon gilt auch:

- Die Kinder dürfen nur fernsehen, wenn sie ihre Hausaufgaben gemacht haben.

AGM-Kontraktion – Beispiel (Forts.)

Da heute jedoch das Finale der Fußballweltmeisterschaft übertragen wird, macht Ted eine Ausnahme:

- Die Kinder dürfen heute fernsehen, auch wenn sie ihre Hausaufgaben noch nicht gemacht haben.

Diese neue Regelung muss jedoch mindestens eine der obigen Regelungen außer Kraft setzen, da sonst auch die alte, dazu im Widerspruch stehende Regelung noch gelten würde.

AGM-Kontraktionspostulate 1/3

(AGM -1) $K - A$ ist eine Wissensmenge.

(AGM -2) $K - A \subseteq K$.
Durch die Rücknahmeoperation soll kein neues Wissen in die Wissensmenge gelangen.

(AGM -3) Ist $A \notin K$, dann $K - A = K$.
Die Rücknahme von Information, die ohnehin nicht zur Wissensmenge gehört, soll zu keiner Änderung der Wissensmenge führen.

(AGM -4) Ist A keine Tautologie, so gilt $A \notin K - A$. (Success)
Die Rücknahmeoperation soll erfolgreich verlaufen, d.h. die zurückgenommene Information soll nicht mehr in der Wissensmenge enthalten sein (bis auf den Fall eventuell, dass es sich bei der zurückgenommenen Information um eine Tautologie handelt).

AGM-Kontraktionspostulate 2/3

Aus diesen ersten 4 Postulaten folgt:

Ist $A \in K$, so gilt $(K - A) + A \subseteq K$

(AGM -5) $K \subseteq (K - A) + A$. (Recovery)
Die Expansions- und Kontraktionsoperation werden in gewisser Weise als invers zueinander betrachtet: Nimmt man zunächst A aus der Wissensmenge und fügt es dann wieder hinzu, so soll das priori-Wissen zumindest als Teilmenge in der resultierenden Wissensmenge enthalten sein.

Bemerkung: Gemeinsam mit den ersten 4 Postulaten fordert dieses Postulat:

Gilt $A \in K,$ so ist $(K - A) + A = K$

AGM-Kontraktionspostulate 3/3

(AGM -6) Sind A und B logisch äquivalent, so ist $K - A = K - B$.
Auch für die Kontraktion gilt, dass das Ergebnis einer Kontraktionsoperation nicht von der syntaktischen Form, sondern von der (semantischen) Bedeutung einer Formel abhängen soll.

(AGM -7) $(K - A) \cap (K - B) \subseteq K - (A \wedge B)$.
Die Wissensmenge, die sich durch Rücknahme von $A \wedge B$ erhält, soll alles Wissen enthalten, dass sowohl nach der Rücknahme von A als auch nach der Rücknahme von B noch verbleibt.

(AGM -8) Ist $A \notin K - (A \wedge B)$, so gilt $K - (A \wedge B) \subseteq K - A$.
Liegt A nicht mehr in der Wissensmenge, die sich nach Rücknahme von $A \wedge B$ ergibt, so ist diese Wissensmenge in $K - A$ enthalten.

AGM-Kontraktionspostulate – Übersicht

(AGM -1) $K - A$ ist eine Wissensmenge.

(AGM -2) $K - A \subseteq K$.

(AGM -3) Ist $A \notin K$, dann $K - A = K$.

(AGM -4) Ist A keine Tautologie, so gilt $A \notin K - A$. (Success)

(AGM -5) $K \subseteq (K - A) + A$. (Recovery)

(AGM -6) Sind A und B logisch äquivalent, so ist $K - A = K - B$.

(AGM -7) $(K - A) \cap (K - B) \subseteq K - (A \wedge B)$.

(AGM -8) Ist $A \notin K - (A \wedge B)$, so gilt $K - (A \wedge B) \subseteq K - A$.

(AGM-1 - AGM-6) – AGM-Basispostulate für die Kontraktion.

AGM-Kontraktion 1/2

Unter der Annahme, dass diese Basispostulate gelten, gilt:

Die Konjunktion von **(AGM -7)** und **(AGM -8)** ist äquivalent zu

	$K - (A \wedge B) = K - A$
oder	$K - (A \wedge B) = K - B$
oder	$K - (A \wedge B) = (K - A) \cap (K - B)$

Aus **(AGM -1)**, **(AGM -4)** und **(AGM -8)** folgt:

$K - (A \wedge B) \subseteq K - A$ oder $K - (A \wedge B) \subseteq K - B$

AGM-Kontraktion 2/2

Wie im Fall der Revision reichen diese Postulate nicht aus, um eine Kontraktionsoperation eindeutig zu beschreiben!

Es gibt also viele mögliche, mit der AGM-Theorie verträgliche Kontraktionen.

Revision und Kontraktion 1/3

Revision kann durch Kontraktion und Expansion definiert werden:

$$K * A = (K - \neg A) + A$$

Levi-Identität

Kontraktion kann durch Revision definiert werden:

$$K - A = K \cap (K * \neg A)$$

Harper-Identität

Revision und Kontraktion 2/3

Es gelten die folgenden Sätze (s. [Gärdenfors & Rott, 1994]):

- Erfüllt die Kontraktionsoperation $-$ die AGM-Postulate **(AGM -1) – (AGM -8)**, so erfüllt die durch die Levi-Identität definierte Revisionsoperation die AGM-Postulate **(AGM *1) – (AGM *8)**.
- Erfüllt die Revisionsoperation $*$ die AGM-Postulate **(AGM *1) – (AGM *8)**, so erfüllt die durch die Harper-Identität definierte Kontraktionsoperation die AGM-Postulate **(AGM -1) – (AGM -8)**.

(s. Übungen)

Revision und Kontraktion 3/3

Was ergibt die Hintereinanderschaltung von Levi und Harper?

- Levi $\rightarrow$ Harper:

$$K * A \overset{Levi}{=} (K - \neg A) + A \overset{Harper}{=} (K \cap (K * A)) + A = K * A \text{ nach AGM}$$

- Harper $\rightarrow$ Levi:

$$K - A \overset{Harper}{=} K \cap (K * \neg A) \overset{Levi}{=} K \cap ((K - A) + \neg A) = K - A \text{ nach AGM}$$

AGM-Schwanensee 1/5

A	*(Der Vogel auf dem See ist ein) Schwan.*
B	*(Der See liegt in) Schweden.*
$B \Rightarrow C$	*Schweden ist ein Teil von Europa.*
$A \wedge C \Rightarrow D$	*Alle europäischen Schwäne sind weiss.*

a priori-Wissen: $K = Cn(\{A, B,\ B \Rightarrow C,\ A \wedge C \Rightarrow D\})$

neue Information: nimm D zurück

Ist die folgende Kontraktion zulässig nach AGM?

$$K - D = Cn(\{B, B \Rightarrow C, A \wedge C \Rightarrow D\})$$

AGM-Schwanensee 2/5

A	*(Der Vogel auf dem See ist ein) Schwan.*
B	*(Der See liegt in) Schweden.*
$B \Rightarrow C$	*Schweden ist ein Teil von Europa.*
$A \wedge C \Rightarrow D$	*Alle europäischen Schwäne sind weiss.*

a priori-Wissen: $K = Cn(\{A, B,\ B \Rightarrow C,\ A \wedge C \Rightarrow D\})$

neue Information (durch Beobachtung): $\neg D$

Mögliche Revisionen mit $\neg D$:

$$K * (\neg D) = \begin{cases} Cn(\{\neg D, B, B \Rightarrow C, A \wedge C \Rightarrow D\}) =: K_1^* \\ Cn(\{\neg D, A, B \Rightarrow C, A \wedge C \Rightarrow D\}) =: K_2^* \\ Cn(\{\neg D, A, B, A \wedge C \Rightarrow D\}) =: K_3^* \\ Cn(\{\neg D, A, B, B \Rightarrow C\}) =: K_4^* \end{cases}$$

AGM-Schwanensee 3/5

$$\begin{aligned}
K_1^* &= Cn(\{\neg D, B, B \Rightarrow C, A \wedge C \Rightarrow D\}) \\
&= Cn(\{\neg D, B, C, \neg A\}) \\
K_2^* &= Cn(\{\neg D, A, B \Rightarrow C, A \wedge C \Rightarrow D\}) \\
&= Cn(\{\neg D, A, \neg B, \neg C\}) \\
K_3^* &= Cn(\{\neg D, A, B, A \wedge C \Rightarrow D\}) \\
&= Cn(\{\neg D, A, B, \neg C\}) \\
K_4^* &= Cn(\{\neg D, A, B, B \Rightarrow C\}) \\
&= Cn(\{\neg D, A, B, C\})
\end{aligned}$$

AGM-Schwanensee 4/5

Wende Harper an:

$$K - D = K \cap (K * \neg D)$$

$$\begin{aligned}
K_1^- &= K \cap K_1^* = Cn(\{B, C, A \Leftrightarrow D\}) \\
K_2^- &= K \cap K_2^* = Cn(\{A, B \Leftrightarrow D, C \Leftrightarrow D\}) \\
K_3^- &= K \cap K_3^* = Cn(\{A, B, C \Leftrightarrow D\}) \\
K_4^- &= K \cap K_4^* = Cn(\{A, B, C\})
\end{aligned}$$

AGM-Schwanensee 5/5

a priori-Wissen: $K = Cn(\{A, B,\ B \Rightarrow C,\ A \wedge C \Rightarrow D\})$

Mögliche Revisionen $K * (\neg D)$	Mögliche Kontraktionen $K - D$
$Cn(\{\neg D, B, B \Rightarrow C, A \wedge C \Rightarrow D\})$	$Cn(\{B, B \Rightarrow C, A \Leftrightarrow D\})$
$Cn(\{\neg D, A, B \Rightarrow C, A \wedge C \Rightarrow D\})$	$Cn(\{A, B \Leftrightarrow D, C \Leftrightarrow D\})$
$Cn(\{\neg D, A, B, A \wedge C \Rightarrow D\})$	$Cn(\{A, B, C \Leftrightarrow D\})$
$Cn(\{\neg D, A, B, B \Rightarrow C\})$	$Cn(\{A, B, B \Rightarrow C\})$

Das Recovery-Postulat 1/2

...ist sehr umstritten:

(AGM-5) $K \subseteq (K - A) + A$. (Recovery)

Beispiel: Agent A liest ein Buch über Kleopatra, in dem gesagt wird, sie hätte sowohl einen Sohn als auch eine Tochter gehabt:

$$K_0 = Cn(\{\mathit{sohn} \wedge \mathit{tochter}\})$$

Später erfährt Agent A, dass es sich bei dem Buch um einen Roman handelt und ist nun unsicher darüber, ob Kleopatra überhaupt Kinder hatte –

Das Recovery-Postulat 2/2

er führt daher eine Kontraktion aus:

$$K_1 = K_0 - (\mathit{sohn} \vee \mathit{tochter})$$

Agent A vergewissert sich aus anderen Quellen – tatsächlich, Kleopatra hatte wirklich Kinder:

$$K_2 = K_1 * (\mathit{sohn} \vee \mathit{tochter})$$

Nach der AGM-Theorie gilt nun $K_0 \subseteq K_2$, das bedeutet aber, dass Agent A nun wieder glaubt, dass Kleopatra sowohl Sohn als auch Tochter hat! ♣

AGM-Postulate – und was noch?

- Die AGM-Postulate stecken einen Rahmen fuer logisch zulässige Wissensrevisionsoperationen ab, aber
- Logik alleine reicht nicht aus, um zu entscheiden, wie sinnvolle Wissensrevision erfolgen soll.
- Es wird zusätzliche Information benötigt, um zu konstruktiven Revisionsmethoden zu kommen.
- Es werden zwei Ansätze verfolgt:
  - Revision/Kontraktion via Selektionen ($\rightarrow$ Syntax);
  - Revision/Kontraktion via Relationen auf Formeln ($\rightarrow$ Semantik).

Kapitel 1

1. Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

1.3 Konstruktive Revisionsmethoden: Selektion

Kontraktion via Selektionsfunktionen

Wir betrachten Kontraktionsoperationen; mittels der Levi-Identität können damit auch Revisionsoperationen definiert werden.

K a priori-Wissensmenge,
A die Aussage, die aus K entfernt werden soll.

Idee:
Man entferne Propositionen aus K nach einem gewissen Rezept, so dass die verkleinerte Menge A nicht mehr impliziert; nach dem *minimal-change*-Paradigma sollte die verkleinerte Menge so groß wie möglich sein.

Maximale Kontraktionsmengen 1/3

Eine Menge M heißt maximale Kontraktionsmenge von K bzgl. A, wenn gilt:

- $M \subseteq K$ (beachtet (AGM-2));
- $A \notin Cn(M)$ (beachtet (AGM-1) und (AGM-4));
- für jedes M' mit $M \subseteq M' \subseteq K$, $M \neq M'$, ist $A \in Cn(M')$ (beachtet *minimal change*)

$$\boxed{K \perp A}$$

Menge aller maximalen Kontraktionsmengen von K bzgl. A

Maximale Kontraktionsmengen 2/3

Proposition 1

Ist M eine maximale Kontraktionsmenge von K bzgl. A, so gilt:

- *Ist K eine Wissensmenge, so ist auch M eine Wissensmenge, d.h. deduktiv abgeschlossen.*
- *Ist $B \in K \backslash M$, so ist $B \Rightarrow A \in M$.*

Proposition 2

Jede maximale Kontraktionsmenge $M \in K \perp A$ definiert eine Kontraktionsoperation $K - A$, die die Basispostulate (AGM-1) – (AGM-6) erfüllt.

(Beweis s. später)

Maximale Kontraktionsmengen 3/3

Es gibt eine bijektive Beziehung zwischen maximalen Kontraktionsmengen in $K \perp A$ und Modellen in $Mod(\neg A)$ (wenn $A \in K$, keine Tautologie):

$$M \in K \perp A \quad \text{gdw.} \quad \begin{cases} M \text{ ist deduktiv abgeschlossen und} \\ Mod(M) \;=\; Mod(K) \cup \{\omega\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{für ein } \omega \in Mod(\neg A) \end{cases}$$

Identifiziert man ein Modell ω mit der (genau) passenden Vollkonjunktion bzw. der passenden Literalmenge, die genau ω als Modell hat, so ergibt sich daraus:

$$M \in K \perp A \quad \text{gdw.} \quad M = K \cap Cn(\omega),\ \omega \models \neg A.$$

Kontraktionsmengen und Selektionsfunktionen

Eine Selektionsfunktion S wird realisiert durch Auswahl einer Teilmenge der "besten" Mengen aus $K \perp A$

$$S(K \perp A) \subseteq K \perp A$$

mit

- $S(K \perp A) \neq \emptyset$, wenn $K \perp A \neq \emptyset$, und
- $S(K \perp A) = \{K\}$, wenn $K \perp A = \emptyset$ (gdw. A Tautologie).

Partial Meet-Kontraktion 1/2

Ist S eine Selektionsfunktion auf $K \perp A$, so wird durch

$$K - A = \bigcap S(K \perp A)$$

eine Kontraktion definiert (Partial Meet-Kontraktion).

Lemma 3

Für alle Selektionsfunktionen S gilt

$$K \cap Cn(\{\neg A\}) = \bigcap(K \perp A) \subseteq \bigcap S(K \perp A).$$

Partial Meet-Kontraktion 2/2

Theorem 4

Sei K eine Wissensmenge. Ein Kontraktionsoperator $-$ erfüllt genau dann die AGM-Postulate **(AGM -1) – (AGM -6)**, *wenn er als Partial Meet-Kontraktion realisiert werden kann.*

Insbesondere gilt für jedes $M \in K \perp A$:

$$K \subseteq M + A$$

Partial Meet-Kontraktion – Beispiel 1/2

A	*(Der Vogel auf dem See ist ein) Schwan.*
B	*(Der See liegt in) Schweden.*
$B \Rightarrow C$	*Schweden ist ein Teil von Europa.*
$A \wedge C \Rightarrow D$	*Alle europäischen Schwäne sind weiss.*

a priori-Wissen: $K = Cn(\{A, B,\ B \Rightarrow C,\ A \wedge C \Rightarrow D\})$
neue Information: Vergiss D!

Partial Meet-Kontraktion – Beispiel 2/2

maximale Kontraktionsmengen von K bzgl. D z.B.

$$K \perp D \ni \begin{cases} M_1 = Cn(\{B, C, A \Leftrightarrow D\}) & = K_1^- \\ M_2 = Cn(\{A, B \Leftrightarrow D, C \Leftrightarrow D\}) & = K_2^- \\ M_3 = Cn(\{A, B, C \Leftrightarrow D\}) & = K_3^- \\ M_4 = Cn(\{A, B, C\}) & = K_4^- \end{cases}$$

Wähle $S(K \perp D) = \{M_1, M_4\}$; die resultierende Kontraktion ist dann

$$K - D = M_1 \cap M_4 = Cn(\{B, C, D \Rightarrow A\})$$

Partial Meet-Kontraktion – Extremfälle 1/2

Die Selektionsfunktion S wählt genau eine Menge aus $K \perp A$ aus:

$$| S(K \perp A) | = 1, \; S(K \perp A) = \{M_A\}, \; M_A \in K \perp A$$

$\longrightarrow$ Maxichoice-Kontraktionsoperator:

$$K - A = M_A$$

Theorem 5

Der Revisionsoperator $*$ werde mittels der Levi-Identität durch einen Maxichoice-Kontraktionsoperator definiert. Dann ist für jedes A mit $\neg A \in K$ die Wissensmenge $K * A$ maximal, d.h. für jedes $B (\in \mathcal{L})$ liegt entweder B oder $\neg B$ in $K * A$.

Eine Maxichoice-Revision lässt also keine Unwissenheit mehr zu.

Partial Meet-Kontraktion – Extremfälle 2/2

Die Selektionsfunktion S wählt alle Mengen aus $K \perp A$ aus:

$$S(K \perp A) = K \perp A$$

$\longrightarrow$ Full Meet-Kontraktionsoperator:

$$K - A = \bigcap(K \perp A)$$

Theorem 6

Der Revisionsoperator $*$ werde mittels Levi-Identität durch einen Full Meet-Kontraktionsoperator definiert. Dann gilt für jedes A mit $\neg A \in K$: $K * A = Cn(\{A\})$.

Eine Full Meet-Revision wird also in der Regel viel zu kleine Wissensmengen berechnen.

Relationale Selektionsfunktionen 1/2

Wir betrachten nun die Menge aller maximalen Kontraktionsmengen von K

$$\mathcal{M}(K) = \bigcup_{A \in K, \not\models A} K \perp A$$

d.h. $\mathcal{M}(K)$ ist die Menge aller echten Untertheorien von K
(*Theorie* $=$ deduktiv abgeschlossene Menge von Formeln).

Relationale Selektionsfunktionen 2/2

Eine Selektionsfunktion kann z.B. mittels einer (reflexiven) Relation $\leq$ über $\mathcal{M}(K)$ definiert werden:

$$S(K \perp A) = \begin{cases} \{M \in K \perp A \mid M < M' \text{ für kein } M' \in K \perp A\} & \text{falls } K \perp A \neq \emptyset \\ \{K\} & \text{falls } K \perp A = \emptyset \end{cases}$$

d.h. S wählt die bezgl. $\leq$ maximalen Elemente von $K \perp A$ aus (wobei $M_1 < M_2$ gdw. $M_1 \leq M_2$ und nicht $M_2 \leq M_1$).

S heißt dann relationale Selektionsfunktion, und der dadurch definierte Kontraktionsoperator heißt relationale Partial Meet-Kontraktion.

Relationale Partial Meet-Kontraktion

Theorem 7

Sei K eine Wissensmenge. Der Kontraktionsoperator $-$ erfüllt die AGM-Postulate **(AGM -1) – (AGM -8)** *genau dann, wenn $-$ eine relationale Partial Meet-Kontraktion ist mit einer transitiven Relation.*

Relationale Partial Meet-Kontraktion – Beispiel 1/2

A	*(Der Vogel auf dem See ist ein) Schwan.*
B	*(Der See liegt in) Schweden.*
$B \Rightarrow C$	*Schweden ist ein Teil von Europa.*
$A \wedge C \Rightarrow D$	*Alle europäischen Schwäne sind weiss.*

a priori-Wissen: $K = Cn(\{A, B,\ B \Rightarrow C,\ A \wedge C \Rightarrow D\})$

neue Information: Vergiss D!

Relationale Partial Meet-Kontraktion – Beispiel 2/2

maximale Kontraktionsmengen von K bzgl. D z.B.

$$K \perp D \ni \begin{cases} M_1 = Cn(\{B, C, A \Leftrightarrow D\}) & = K_1^- \\ M_2 = Cn(\{A, B \Leftrightarrow D, C \Leftrightarrow D\}) & = K_2^- \\ M_3 = Cn(\{A, B, C \Leftrightarrow D\}) & = K_3^- \\ M_4 = Cn(\{A, B, C\}) & = K_4^- \end{cases}$$

Wähle $S(K \perp D) = \{M_1, M_4\}$ aufgrund von $M_2 < M_1$ und $M_3 < M_4$; die resultierende Kontraktion ist dann (wie oben) $K - D = M_1 \cap M_4$.

Kapitel 1

1. Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

1.4 Konstruktive Revisionsmethoden: EE-Semantik für AGM

Epistemische Verwurzelung – Idee

Der Begriff der epistemischen Verwurzelung bezieht sich darauf, dass Teile unseres Wissens tiefer und fester verankert sind als andere, im Fall von Konflikten also weniger leicht aufgegeben werden.

Besonders tief epistemisch verwurzelt ist z.B.

- das Wissen um Naturgesetze: Wegen der *Schwerkraft* fallen Dinge nach unten, wenn wir sie loslassen;
- das Wissen um definitorische Hierarchien: *Pinguine* sind *Vögel* sind *Tiere*.

Epistemische Verwurzelung und Kontraktion sind eng miteinander gekoppelt: Wenn auf einer Wissensmenge K eine Kontraktionsoperation durchgeführt werden muss, so wird zunächst das Wissen aufgegeben, das am wenigstens tief epistemisch verwurzelt ist.

Epistemische Verwurzelung – Relation

Epistemische Verwurzelung (*epistemic entrenchment, EE*) bzgl. einer Wissensmenge K wird durch eine (totale) Relation $\leq_E$ auf der Menge der logischen Formeln/Sätze einer Sprache $\mathcal{L}$ ausgedrückt:

$$A \leq_E B$$

bedeutet: B ist (bezgl. K) epistemisch mindestens so verwurzelt wie A

Eine solche Relation muss gewisse Eigenschaften erfüllen, um die epistemische Haltung eines (rationalen) Agenten geeignet widerzuspiegeln, insbesondere muss sie mit der Logik verträglich sein.

Außerdem soll sie zu den AGM-Postulaten passen.

Epistemische Verwurzelung – Definition 1/2

Eine totale Relation $\leq_E$ auf $\mathcal{L}$ heißt Verwurzelungsrelation, wenn sie die folgenden Eigenschaften (EE1)-(EE5) erfüllt:

(EE1) Transitivität: Wenn $A \leq_E B$ und $B \leq_E C$, dann $A \leq_E C$.

(EE2) Kompatibilität mit Cn: Wenn $A \models B$, dann auch $A \leq_E B$.
Logische Schlussfolgerungen sind mindestens so verwurzelt wie die Aussage, aus der sie geschlossen wurden.

Beispiel: $A \models A \vee B$, also ist $A \vee B$ mindestens so verwurzelt wie A: Wenn der Agent A glaubt, dann muss er auch $A \vee B$ glauben. ♣

(EE3) Für alle A, B gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:

$$A \leq_E A \wedge B \quad \text{oder} \quad B \leq_E A \wedge B$$

Konjunktionen sind mindestens so verwurzelt wie eines ihrer Konjunkte.

Epistemische Verwurzelung – Definition 2/2

(EE4) K-Repräsentation: Wenn K konsistent ist, dann ist

$$A \notin K \quad \text{gdw.} \quad A \leq_E B \text{ für alle } B \in \mathcal{L}$$

Diejenigen Aussagen, die nicht in der Wissensmenge enthalten sind, sind genau die minimal verwurzelten Aussagen.

(EE5) Gilt $A \leq_E B$ für alle $A \in \mathcal{L}$, dann gilt $\models B$.
Tautologien sind (genau) die maximal verwurzelten Formeln.

Epistemische Verwurzelung – Beispiel

Beispiel: Die Bedeutungen von A, B, C seien wie folgt:

A weiß, B schwarz, C Rabe;

dann ist sicherlich

$$A \wedge C <_E B \wedge C.$$

♣

Wir wollen noch mehr über Verwurzelungsrelationen in Erfahrung zu bringen.

Epistemische Verwurzelung – Notation

Die strikte Relation $<_E$ wird definiert wie üblich:

$$A <_E B \quad \text{gdw.} \quad A \leq_E B \text{ und nicht } B \leq_E A$$

$A <_E B$ bedeutet, dass B stärker epistemisch verwurzelt ist als A.

Sind A und B gleich stark epistemisch verwurzelt, so schreiben wir

$$A =_E B \quad (\text{gdw. } A \leq_E B \text{ und } B \leq_E A)$$

Epistemische Verwurzelung – Eigenschaften 1/2

Aus den definitorischen Eigenschaften einer epistemischen Verwurzelung $\leq_E$ lassen sich die folgenden Eigenschaften ableiten:

- Reflexivität: $A \leq_E A$ für alle $A \in \mathcal{L}$.
- Jede Konjunktion ist so stark verwurzelt wie ihr schwächstes Konjunkt:

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n =_E \min_i A_i$$

- Wenn $A \in K$ und $B \notin K$ (bei konsistentem K), dann $B <_E A$.

Epistemische Verwurzelung – Eigenschaften 2/2

- Extensionalität: Wenn $A \leq_E B$ und $A \equiv A'$ und $B \equiv B'$, dann auch $A' \leq_E B'$.
- Wenn $A \wedge C <_E B \wedge C$, dann $A <_E B$.
- Wenn $A <_E B$ und $A <_E C$, dann $A <_E B \wedge C$.

Epistemische Verwurzelung – Problem (?)

Nach obigem gilt:

$$\text{Wenn } A \wedge C <_E B \wedge C, \text{ dann } A <_E B.$$

Im Rabenbeispiel war

$$A \wedge C <_E B \wedge C,$$

mit A weiß, B schwarz, C Rabe; aber es gilt nicht unbedingt

$$A <_E B$$

– epistemische Verwurzelung hat Schwächen im Umgang mit kontextbezogenem (nichtmonotonem) Wissen.

Epistemischer Schnitt

Sei $\leq_E$ eine epistemische Verwurzelungsrelation (bzgl. K).

Für eine Formel $A \in \mathcal{L}$ definiere

$$\mathit{cut}_E(A) = \{B : A \leq_E B\}$$

Der epistemische Schnitt von A enthält alle Formeln, die mindestens so stark verwurzelt sind wie A.

Es gilt:

$\mathit{cut}_E(A)$ ist deduktiv abgeschlossen für jedes $A \in \mathcal{L}$.

Epistemische Verwurzelung und die Wissensmenge

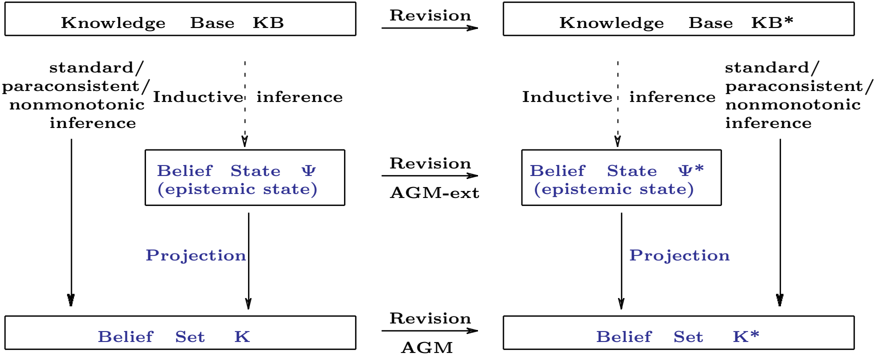
Jede epistemische Verwurzelungsrelation $\leq_E$ ist einer Wissensmenge K zugeordnet (s. (EE4) K-Repräsentation); ein konsistentes K lässt sich aus $\leq_E$ zurückgewinnen:

$$K = \{A \in \mathcal{L} : \perp <_E A\}$$

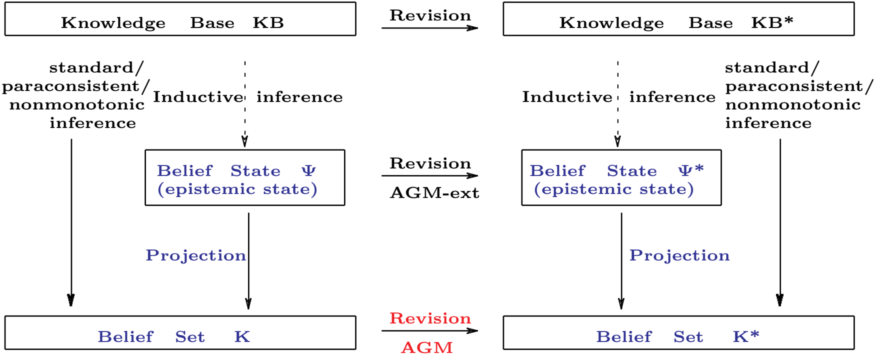
Die einer epistemischen Verwurzelungsrelation $\leq_E$ zugeordnete Wissensmenge K wird mit $\mathit{Bel}(\leq_E)$ ($\rightarrow$ Projektion!) bezeichnet:

$$\boxed{\mathit{Bel}(\leq_E) = \{A \in \mathcal{L} : \perp <_E A\}}$$

Wissensrepräsentation und -revision



Wissensrepräsentation und -revision



Epistemische Verwurzelung und Kontraktion 1/5

Epistemische Verwurzelungen und AGM-Kontraktionen sind eng miteinander verbunden, genauer:

- Zu jeder epistemischen Verwurzelungsrelation $\leq_E$ kann eine Kontraktion definiert werden, die $\leq_E$ benutzt und die AGM-Postulate erfüllt.
- Umgekehrt kann zu jeder AGM-Kontraktion eine Verwurzelungsrelation definiert werden.

Dieser Kreis soll geschlossen sein, d.h. insbesondere, dass jede AGM-Kontraktion auf einer Verwurzelungsrelation basiert.

Epistemische Verwurzelung und Kontraktion 2/5

Eine Verwurzelungsrelation $<_E$ und ein Kontraktionsoperator $-$ können durch die folgenden beiden Bedingungen miteinander verknüpft werden:

Kontraktion $\rightarrow$ EE

(C<) $A <_E B$ gdw. $A \notin K - (A \wedge B)$ und $B \in K - (A \wedge B)$.

EE $\rightarrow$ Kontraktion

(C−) $B \in K - A$ gdw. $B \in K$, und es gilt $A <_E A \vee B$,
oder nicht $A <_E \top$

Epistemische Verwurzelung und Kontraktion 3/5

Theorem 8

Zwischen AGM-Kontraktion und epistemischer Verwurzelung besteht der folgende Zusammenhang:

- *Ist $\leq_E$ eine epistemische Verwurzelung, so definiert (C$-$) eine Kontraktionsfunktion, die die AGM-Kontraktionspostulate erfüllt, und die Bedingung (C$<$) ist erfüllt.*
- *Ist $-$ eine AGM-Kontraktion, so definiert (C$<$) eine epistemische Verwurzelung, und die Bedingung (C$-$) ist erfüllt.*

Die Einhaltung von (C$<$) und (C$-$) sorgt dafür, dass sich der Kreis zwischen Kontraktion und epistemischer Verwurzelung lückenlos schließt.

Motivation für (C−) 1/2

Zusammenhang mit AGM-Kontraktion (für Extremfälle):

- "Nicht $A <_E \top$" besagt: "A ist Tautologie". In diesem Fall besagt (C−): $K - A = K$.
- Ist $A \notin K$, so ist die Bedingung $A <_E A \vee B$ für jedes $B \in K$ erfüllt wegen $A \notin K, A \vee B \in K$ und der K-Repräsentationseigenschaft; also gilt auch in diesem Fall $K - A = K$.

Motivation für (C$-$) 2/2

Zusammenhang mit (C$<$):

Sei $A \in K$, $A \not\equiv \top$. Die Kontraktion $K - A$ bzw. (C$-$) muss so definiert werden, dass AGM-Postulate und (C$<$) gelten.

Wie kommt man dann auf $A <_E A \vee B$?

Sei $B \in K$. Wir benutzen (C$<$) mit $A \vee B$ anstelle von B, wobei zu beachten ist, dass $A \wedge (A \vee B) = A$ ist :

$$A <_E A \vee B \text{ gdw. } A \notin K - A \text{ und } A \vee B \in K - A$$

Nehmen wir nun die Gültigkeit des Recovery-Postulats

$$\text{(AGM -5)} \quad K \subseteq (K - A) + A$$

an, so kann man auch $\neg A \vee B \in K - A$ wegen $B \in K$ annehmen[5]. Insgesamt also

$$A <_E A \vee B \text{ gdw. } A \notin K - A \text{ und } B \in K - A$$

[5] $K - A, A \models B$ impliziert $K - A \models A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

Epistemische Verwurzelung und Kontraktion 4/5

Ist $\leq_E$ eine epistemische Verwurzelungsrelation bezgl. K, so kann also eine passende AGM-Kontraktion definiert werden durch

$$K - A = \begin{cases} \{B \in K : A <_E A \vee B\} & \text{, wenn } \not\models A \\ K & \text{, sonst} \end{cases}$$

(s. Übungen)

Epistemische Verwurzelung und Kontraktion 5/5

Definiert man den Übergang von EE zur Kontraktion durch

alt. EE $\rightarrow$ Kontraktion

(altC$-$) $B \in K - A$ gdw. $B \in K$, und es gilt $A <_E B$,
oder nicht $A <_E \top$

so entsteht eine Kontraktion, die nicht (Recovery) erfüllt, also keine AGM-Kontraktion ist.

Epistemische Verwurzelung und Revision

Mit Hilfe der Levi-Identität gewinnt man aus einer epistemischen Verwurzelungsrelation $\leq_E$ auch eine AGM-Revision:

$$K * A = \begin{cases} \{B \in \mathcal{L} : \neg A <_E \neg A \vee B\}, & \text{wenn } \not\models \neg A \\ \perp, & \text{sonst} \end{cases}$$

AGM-Kontraktion via Verwurzelung

Das Problem, geeignete Kontraktionen (und damit auch Revisionen) zu definieren, lässt sich also auf das Problem zurückführen, Wissen (i.e. Formeln) nach dem Verwurzelungsgrad zu ordnen.

Wegen

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n =_E \min_i A_i$$

in Verbindung mit der Tatsache, dass sich jede Formel in KNF darstellen lässt, genügt es, Verwurzelungsrelationen auf den maximalen Disjunktionen (i.e. Disjunktionen, die jedes Atom des Vokabulars entweder positiv oder negiert enthalten) festzulegen.

Epistemische Verwurzelung – Beispiel 1/2

A	*(Der Vogel auf dem See ist ein) Schwan.*
B	*(Der See liegt in) Schweden.*
$B \Rightarrow C$	*Schweden ist ein Teil von Europa.*
$A \wedge C \Rightarrow D$	*Alle europäischen Schwäne sind weiss.*

a priori-Wissen: $K = Cn(\{A, B,\ B \Rightarrow C,\ A \wedge C \Rightarrow D\})$
neue Information: Vergiss D!

Epistemische Verwurzelungs-Relation eines Agenten ist festzulegen auf den 2^4 maximalen Disjunktionen

$$A \vee B \vee C \vee D,\ A \vee B \vee C \vee \neg D, \ldots, \neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D.$$

Epistemische Verwurzelung – Beispiel 2/2

A	*(Der Vogel auf dem See ist ein) Schwan.*
B	*(Der See liegt in) Schweden.*
$B \Rightarrow C$	*Schweden ist ein Teil von Europa.*
$A \wedge C \Rightarrow D$	*Alle europäischen Schwäne sind weiss.*

a priori-Wissen: $K = Cn(\{A, B,\ B \Rightarrow C,\ A \wedge C \Rightarrow D\})$
neue Information: Vergiss D!

Besser wäre es, man würde nur Relationen zwischen ausgewählten Formeln festlegen – z.B.

$$A < A \wedge C \Rightarrow D < B < B \Rightarrow C$$

– und daraus eine vollständige Verwurzelungsrelation generieren.

Kapitel 1

1. Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

1.5 Partielle Darstellungen von Verwurzelungsrelationen

Partielle Verwurzelungs-Rankings (PVR)

Definition 9 (PVR)

Ein partielles Verwurzelungs-Ranking (PVR) ist eine Funktion

$$\mathbf{B} : \mathcal{B} \to [0, 1],$$

mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$, so dass für alle $\phi \in \mathcal{B}$ gilt:

- (PVR1) $\{\psi \in \mathcal{B} : \mathbf{B}(\phi) < \mathbf{B}(\psi)\} \not\vdash \phi$, wenn ϕ keine Tautologie ist. D.h., kein $\phi \in \mathcal{B}$ lässt sich aus den stärker verwurzelten Formeln aus $\mathcal{B}$ ableiten. (wegen (EE1-3))
- (PVR2) Wenn ϕ widersprüchlich ist, dann ist $\mathbf{B}(\phi) = 0$. (wg. (EE4))
- (PVR3) $\mathbf{B}(\phi) = 1$ gdw. ϕ eine Tautologie ist. (wg. (EE5))

$\mathcal{B}$ hat die Funktion einer epistemischen Basis. Alle Eigenschaften (PVR1) – (PVR3) sind wichtig, damit $\mathbf{B}$ sich zu einer epistemischen Verwurzelungsrelation $\leq_{\mathbf{B}}$ fortsetzen lässt, d.h., aus $\mathbf{B}(\phi) \leq \mathbf{B}(\psi)$ soll $\phi \leq_{\mathbf{B}} \psi$ folgen.

Beispiel Pinguin

$\mathbf{B}$ sei wie folgt gegeben:

$\mathbf{B}(\mathit{bird} \vee \neg \mathit{bird}) = 1$, $\mathbf{B}(\mathit{bird} \wedge \neg \mathit{bird}) = 0$,
$\mathbf{B}(\mathit{bird} \Rightarrow \mathit{feathers}) = 0.3$, $\mathbf{B}(\mathit{bird} \Rightarrow \mathit{wings}) = 0.1$, $\mathbf{B}(\mathit{bird}) = 0.2$.

$\mathbf{B}$ ist ein partielles Verwurzelungsranking.

PVR – explizite und implizite Informationen

Sei $\mathbf{B} : \mathcal{B} \to [0,1]$ ein PVR.

- Der durch $\mathbf{B}$ repräsentierte explizite Informationsgehalt ist die Menge der Elemente aus $\mathcal{B}$ mit positivem Verwurzelungsgrad:

$$\mathit{exp}(\mathbf{B}) = \{\phi \in \mathcal{B} : \mathbf{B}(\phi) > 0\}$$

- Der durch $\mathbf{B}$ repräsentierte implizite Informationsgehalt ist die Menge der Folgerungen des expliziten Informationsgehaltes:

$$\mathit{imp}(\mathbf{B}) = Cn(\mathit{exp}(\mathbf{B}))$$

Beispiel Pinguin (Forts.)

Im Pinguin-PVR $\mathbf{B}$ mit

$$\mathbf{B}(bird \vee \neg bird) = 1, \qquad \mathbf{B}(bird \wedge \neg bird) = 0,$$
$$\mathbf{B}(bird \Rightarrow feathers) = 0.3, \quad \mathbf{B}(bird \Rightarrow wings) = 0.1, \; \mathbf{B}(bird) = 0.2.$$

ist

$$exp(\mathbf{B}) = \left\{ \begin{array}{ll} bird \vee \neg bird, & bird \\ bird \Rightarrow feathers, & bird \Rightarrow wings \end{array} \right\}$$

und

$$imp(\mathbf{B}) = Cn(\{bird,\ feathers,\ wings\}).$$

PVR $\rightarrow$ Verwurzelungsrelation 1/3

Um aus einem PVR eine epistemische Verwurzelungsrelation zu machen, muss auch das implizite Wissen epistemisch angeordnet werden. In der Regel ist das auf verschiedene Art und Weise möglich, so dass sich aus einer PVR nicht eindeutig eine Verwurzelungsrelation erzeugen lässt.

Beispiel: Sei $\mathbf{B}(\phi) = 0.2$ und $\mathbf{B}(\psi) = 0.4$ eine PVR. Alle damit kompatiblen Verwurzelungsrelationen $\leq_E$ werden $\phi <_E \psi$ erfüllen; da $\psi \models \phi \vee \psi$, gilt auch $\psi \leq_E \phi \vee \psi$; hier sind aber sowohl $\psi <_E \phi \vee \psi$ als auch $\psi =_E \phi \vee \psi$ möglich. ♣

PVR $\rightarrow$ Verwurzelungsrelation 2/3

Wir wollen Aussagen $A \in \mathcal{L}$ nicht stärker verwurzeln, als dies unbedingt erforderlich ist – deswegen wird den impliziten Informationen ein minimal möglicher Akzeptanzgrad (unter Berücksichtigung von (PER1) und (EE2-3)) zugewiesen:

$$\mathit{degree}_{\mathbf{B}}(A) = \begin{cases} \max\{a \in [0,1] : \{\psi \in \mathit{exp}(\mathbf{B}) | \mathbf{B}(\psi) \geq a\} \vdash A\}, & \\ \qquad \text{wenn } A \in \mathit{imp}(\mathbf{B}) & \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man kann $\mathit{degree}_{\mathbf{B}}(A)$ effizient berechnen, indem man die Elemente der Basis $\mathcal{B}$ stufenweise mit den jeweils höheren Stufen vereinigt, bei der höchsten Stufe beginnend, bis man A ableiten kann.

Beispiel Pinguin (Forts.)

$\mathbf{B}(\mathit{bird} \vee \neg \mathit{bird}) = 1,$ $\mathbf{B}(\mathit{bird} \wedge \neg \mathit{bird}) = 0,$
$\mathbf{B}(\mathit{bird} \Rightarrow \mathit{feathers}) = 0.3,$ $\mathbf{B}(\mathit{bird} \Rightarrow \mathit{wings}) = 0.1,$ $\mathbf{B}(\mathit{bird}) = 0.2.$

Daraus berechnen wir

$\mathit{degree}_{\mathbf{B}}(\mathit{feathers}) = 0.2,$ $\mathit{degree}_{\mathbf{B}}(\mathit{wings}) = 0.1,$
$\mathit{degree}_{\mathbf{B}}(\neg \mathit{bird}) = 0,$ $\mathit{degree}_{\mathbf{B}}(\neg \mathit{feathers}) = 0$
$\mathit{degree}_{\mathbf{B}}((\mathit{bird} \Rightarrow \mathit{feathers}) \wedge \mathit{bird}) = 0.2$
$\mathit{degree}_{\mathbf{B}}(\mathit{feathers} \wedge \mathit{wings}) = 0.1$

Erkenntnisse zu degree$_{\mathbf{B}}$

Proposition 3

Sei $\mathbf{B} : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ eine PVR, sei $A \in \mathcal{L}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *degree*$_{\mathbf{B}}(A) = 0$ *gdw.* $A \notin$ *imp*$(\mathbf{B})$;
   degree$_{\mathbf{B}}(A) > 0$ *gdw.* $A \in$ *imp*$(\mathbf{B})$.
2. *degree*$_{\mathbf{B}}(A) = 1$ *gdw.* $A \equiv \top$.
3. *degree*$_{\mathbf{B}}(A) = \mathbf{B}(A)$ *für* $A \in \mathcal{B}$.

PVR $\rightarrow$ Verwurzelungsrelation 3/3

Aus einem PVR lässt sich tatsächlich eine epistemische Verwurzelungsrelation berechnen:

Theorem 10

Sei $\mathbf{B}$ eine PVR, und definiere dazu eine Relation $\leq_{\mathbf{B}}$ durch

$$A \leq_{\mathbf{B}} B \text{ gdw. } \mathit{degree}_{\mathbf{B}}(A) \leq \mathit{degree}_{\mathbf{B}}(B).$$

Dannn ist $\leq_{\mathbf{B}}$ eine epistemische Verwurzelungsrelation bzgl. $\mathit{imp}(\mathbf{B}) = K$.

PVR $\rightarrow$ Verwurzelungsrelation – Beispiel 1/2

Es sei eine PVR $\mathbf{B}$ wie folgt gegeben:

$$\mathbf{B}(\phi) = 0.2, \ \mathbf{B}(\psi) = 0.4;$$

dann ist $exp(\mathbf{B}) = \{\phi, \psi\}, \ imp(\mathbf{B}) = Cn(\{\phi, \psi\})$.
Wir vervollständigen $\mathbf{B}$ zu einer Verwurzelungsrelation:

$$\begin{aligned}
degree_{\mathbf{B}}(\neg\phi \vee \neg\psi) &= 0 \\
degree_{\mathbf{B}}(\phi \vee \neg\psi) &= 0.2 \\
degree_{\mathbf{B}}(\neg\phi \vee \psi) &= 0.4 \\
degree_{\mathbf{B}}(\phi \vee \psi) &= 0.4
\end{aligned}$$

PVR $\rightarrow$ Verwurzelungsrelation – Beispiel 2/2

Die gleiche Verwurzelungsrelation wird auch erzeugt durch die folgenden PVR:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(\neg\phi \vee \neg\psi) = 0,\ \mathbf{B}_1(\phi \vee \neg\psi) = 0.2,\ \mathbf{B}_1(\neg\phi \vee \psi) &= 0.4, \\ \mathbf{B}_1(\phi \vee \psi) &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad \mathbf{B}_2(\neg\phi \wedge \neg\psi) = 0,\ \mathbf{B}_2(\phi \vee \neg\psi) = 0.2,\ \mathbf{B}_2(\psi) = 0.4$$

PVR – Schwanensee 1/2

A	*(Der Vogel auf dem See ist ein) Schwan.*
B	*(Der See liegt in) Schweden.*
$B \Rightarrow C$	*Schweden ist ein Teil von Europa.*
$A \wedge C \Rightarrow D$	*Alle europäischen Schwäne sind weiss.*

Wir wollen eine Verwurzelungsrelation erzeugen aus der folgenden Relation zwischen den Formeln der Wissensbasis:

$$A \wedge C \Rightarrow D < A < B < B \Rightarrow C$$

wobei wir dies noch genauer durch eine PVR spezifizieren:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{B}(A \wedge C \Rightarrow D) = 0.2, & \mathbf{B}(A) = 0.3, \\ \mathbf{B}(B) = 0.7, & \mathbf{B}(B \Rightarrow C) = 0.9 \end{array}$$

$$\mathit{exp}(\mathbf{B}) = \{A, B, B \Rightarrow C, A \wedge C \rightarrow D\}, \ \mathit{imp}(\mathbf{B}) = Cn(A, B, C, D)$$

PVR – Schwanensee 2/2

$$A \vee B \vee C \vee D$$
$$A \vee B \vee \overline{C} \vee D$$
$$A \vee \overline{B} \vee C \vee D$$
$$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$$
$$\overline{A} \vee B \vee C \vee D$$
$$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee D$$
$$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D$$
$$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$$

$$A \vee B \vee C \vee \overline{D}$$
$$A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$$
$$A \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$$
$$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$$
$$\overline{A} \vee B \vee C \vee \overline{D}$$
$$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$$
$$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$$
$$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$$

PVR – Schwanensee 2/2

$A \vee B \vee C \vee D$		$A \vee B \vee C \vee \overline{D}$	
$A \vee B \vee \overline{C} \vee D$		$A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	
$A \vee \overline{B} \vee C \vee D$	0.9	$A \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$	0.9
$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$		$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	
$\overline{A} \vee B \vee C \vee D$		$\overline{A} \vee B \vee C \vee \overline{D}$	
$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee D$		$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	
$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D$	0.9	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$	0.9
$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$		$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	

PVR – Schwanensee 2/2

$A \vee B \vee C \vee D$	0.7	$A \vee B \vee C \vee \overline{D}$	0.7
$A \vee B \vee \overline{C} \vee D$	0.7	$A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0.7
$A \vee \overline{B} \vee C \vee D$	0.9	$A \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$	0.9
$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$		$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	
$\overline{A} \vee B \vee C \vee D$	0.7	$\overline{A} \vee B \vee C \vee \overline{D}$	0.7
$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee D$	0.7	$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0.7
$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D$	0.9	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$	0.9
$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$		$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	

PVR – Schwanensee 2/2

$A \vee B \vee C \vee D$	0.7	$A \vee B \vee C \vee \overline{D}$	0.7
$A \vee B \vee \overline{C} \vee D$	0.7	$A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0.7
$A \vee \overline{B} \vee C \vee D$	0.9	$A \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$	0.9
$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$	0.3	$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0.3
$\overline{A} \vee B \vee C \vee D$	0.7	$\overline{A} \vee B \vee C \vee \overline{D}$	0.7
$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee D$	0.7	$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0.7
$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D$	0.9	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$	0.9
$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$	0.2	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0

Verwurzelungsrelation $\rightarrow$ PVR 1/5

Umgekehrt ist es praktisch, eine Verwurzelungsrelation durch eine geeignete PVR kompakt so darzustellen, dass die Relation aus der PVR wieder erzeugt werden kann.

Sei $\leq_E$ eine Verwurzelungsrelation mit

$$K = \mathit{Bel}(\leq_E) = \{A \in \mathcal{L} \mid \bot <_E A\}$$

$\leq_E$ partitioniert $\mathcal{L}$ in Mengen $\mathcal{L}_0, \ldots, \mathcal{L}_m$ so, dass gilt

Wenn $A \in \mathcal{L}_i$ und $B \in \mathcal{L}_j$ mit $i < j$, dann $A <_E B$.
Für $A, B \in \mathcal{L}_i$ gilt: $A =_E B$.

Verwurzelungsrelation → PVR 2/5

Die Mengen $\mathcal{L}_i$ bestehen genau aus den Formeln in $\mathcal{L}$, die jeweils gleich epistemisch verwurzelt sind.

$\leq_E$ wird eindeutig durch die Einordnungen der maximalen Disjunktionen $D = D_{\mathcal{L}} = \{d_1, \ldots, d_{2^n}\}$ ($n = \#$ Atome) festgelegt:

Für $A \in \mathcal{L}$ sei $\min_D(A)$ die Menge der minimal verwurzelten $d \in D$, die in der kanonischen KNF (KKNF) von A vorkommen[6]; dann ist

$$A \leq_E B \text{ gdw. } d_A \leq_E d_B \text{ für alle } d_A \in \min_D(A), d_B \in \min_D(B).$$

Wir partitionieren $D = D_0 \cup \ldots D_{m-1}$ so, dass

$$d, d' \in D_k \text{ gdw. } d =_E d';$$
$$d \in D_i, d' \in D_j, i < j \Rightarrow d <_E d'.$$

[6] d kommt in der KKNF von A vor gdw. $A \models d$

Verwurzelungsrelation → PVR 3/5

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \{A \in \mathcal{L} \mid \min_D(A) \cap D_0 \neq \emptyset\} \cup \{\text{Widersprüche}\}(= \mathcal{L} \backslash K); \\
\mathcal{L}_i &= \{A \in \mathcal{L} \mid \min_D(A) \cap D_i \neq \emptyset\}, 0 < i < m; \\
\mathcal{L}_m &= \{\text{Tautologien}\}
\end{aligned}$$

Beispiel – Schwanensee

$A \vee B \vee C \vee D$	0.7	$A \vee B \vee C \vee \overline{D}$	0.7	$A \vee B \vee \overline{C} \vee D$	0.7
$A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0.7	$A \vee \overline{B} \vee C \vee D$	0.9	$A \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$	0.9
$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$	0.3	$A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0.3		
$\overline{A} \vee B \vee C \vee D$	0.7	$\overline{A} \vee B \vee C \vee \overline{D}$	0.7	$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee D$	0.7
$\overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0.7	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D$	0.9	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}$	0.9
$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D$	0.2	$\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}$	0		

$\mathcal{L}_0 \to D_0 :$ $\{\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}\}$ plus Widersprüche

$\mathcal{L}_1 \to D_1 :$ $\{\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D\}$, $\mathcal{L}_2 \to D_2 : \{A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D, A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}\}$

$\mathcal{L}_3 \to D_3 :$ $\{A \vee B \vee C \vee D, A \vee B \vee C \vee \overline{D}, A \vee B \vee \overline{C} \vee D,$
$A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}, \overline{A} \vee B \vee C \vee D,$
$\overline{A} \vee B \vee C \vee \overline{D}, \overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee D, \overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}\}$

$\mathcal{L}_4 \to D_4 :$ $\{A \vee \overline{B} \vee C \vee D, A \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}, \overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D,$
$\overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}\}$

$\mathcal{L}_5 :$ {Tautologien}

Verwurzelungsrelation $\rightarrow$ PVR 4/5

Sei $\leq_E$ eine epistemische Verwurzelungsrelation mit $K = \mathit{Bel}(\leq_E)$.

Sei $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1$ eine aufsteigende Folge von Zahlen in $[0, 1]$.
Sei $\Gamma \subseteq K$ (konsistent) so, dass für alle $A \in K$ gilt

$$\{\phi \in \Gamma \mid A \leq_E \phi\} \vdash A.$$

Dann definiert

$$\mathbf{B} : \Gamma \rightarrow [0, 1],\ \mathbf{B}(\phi) = a_i \text{ gdw. } \phi \in \Gamma \cap \mathcal{L}_i$$

ein PVR, das $\leq_E$ erzeugt, d.h. es gilt $\leq_{\mathbf{B}} = \leq_E$.
(Es gilt nämlich: $A \in \mathcal{L}_i$ gdw. $\mathit{degree}_{\mathbf{B}}(A) = a_i$.)

Verwurzelungsrelation $\rightarrow$ PVR 5/5

Wie findet man ein geeignetes Γ, das als epistemische Repräsentationsmenge von $\leq_E$ dienen kann?

Sei $\leq_E$ eine Verwurzelungsrelation, die die Menge der Formeln $\mathcal{L}$ in Mengen $\mathcal{L}_0, \ldots, \mathcal{L}_n$ (wie oben) partitioniert.

Definiere für $0 \leq i \leq n$

$$\phi_0 = \bot; \; \phi_i = \bigwedge_{d \in D_i} d, 0 < i < n; \; \phi_n = \top \quad \text{und} \quad \Gamma = \{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$$

Dann kann Γ als Repräsentation von $\leq_E$ dienen (wie oben beschrieben); zu zeigen ist nur: für alle $A \in K$ gilt $\{\phi \in \Gamma \mid A \leq_E \phi\} \models A$.

Verwurzelungsrelation → PVR – Beispiel

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{L}_0 & : & \{\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D},\ \text{Widersprüche}\} \\
\mathcal{L}_1 & : & \{\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D\},\ \mathcal{L}_2 : \{A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D, A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}\} \\
\mathcal{L}_3 & : & \{A \vee B \vee C \vee D, A \vee B \vee C \vee \overline{D}, A \vee B \vee \overline{C} \vee D, \\
 & & \quad A \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}, \overline{A} \vee B \vee C \vee D, \\
 & & \quad \overline{A} \vee B \vee C \vee \overline{D}, \overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee D, \overline{A} \vee B \vee \overline{C} \vee \overline{D}\} \\
\mathcal{L}_4 & : & \{A \vee \overline{B} \vee C \vee D, A \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}, \overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee D, \\
 & & \quad \overline{A} \vee \overline{B} \vee C \vee \overline{D}\} \\
\mathcal{L}_5 & : & \{\text{Tautologien}\}
\end{array}
$$

Eine zugehörige Respräsentationsmenge Γ ergibt sich wie folgt:

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma = & \{\phi_0 = \bot,\ \phi_1 = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee D, \\
 & \phi_2 = A \vee \overline{B} \vee \overline{C},\ \phi_3 = B,\ \phi_4 = \overline{B} \vee C,\ \phi_5 = \top\}
\end{array}
$$

Verwurzelungsfunktionen

Anstatt eine Relation zu untersuchen, ist es manchmal einfacher, entsprechende Funktionen zu betrachten ...

Eine Verwurzelungsfunktion ist eine Funktion

$$\mathbf{E} : \mathcal{L} \to [0, 1]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle $A, B \in \mathcal{L}$ gilt: Wenn $A \models B$, dann $\mathbf{E}(A) \leq \mathbf{E}(B)$.
- Für alle $A, B \in \mathcal{L}$ ist $\mathbf{E}(A) \leq \mathbf{E}(A \wedge B)$ oder $\mathbf{E}(B) \leq \mathbf{E}(A \wedge B)$.
- A ist Tautologie gdw. $\mathbf{E}(A) = 1$.
- Ist A inkonsistent, so gilt $\mathbf{E}(A) = 0$.

Beispiel Tweety

p *penguin*, b *bird*, f *fly*

$p \vee b \vee f$	0.9	$\overline{p} \vee b \vee f$	0.8
$p \vee b \vee \overline{f}$	0.9	$\overline{p} \vee b \vee \overline{f}$	0.8
$p \vee \overline{b} \vee f$	0.9	$\overline{p} \vee \overline{b} \vee f$	0.5
$p \vee \overline{b} \vee \overline{f}$	0.9	$\overline{p} \vee \overline{b} \vee \overline{f}$	0

Repräsentation als PVR:

$$\mathbf{B}(p) = 0.9 \qquad \mathbf{B}(p \Rightarrow b) = 0.8$$

$$\mathbf{B}(p \wedge b \Rightarrow f) = 0.5 \qquad (\mathbf{B}(\overline{p} \vee \overline{b} \vee \overline{f}) = 0)$$

Kapitel 1

1. Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

1.6 Minimale Modelle

Minimale Modelle – Grundidee

Sei K eine Wissensmenge, die mit neuer Information A revidiert werden soll. Dies kann z.B. mit *relationaler Partial Meet-Revision* (Relation auf Formelmengen) oder via *epistemischer Verwurzelung* (Relation auf Formeln) erreicht werden.

Alternative Idee:

Benutze Relation auf der Menge aller Interpretationen, um zu entscheiden, welche Interpretationen Modelle von $K * A$ sein sollen; dadurch wird $K * A$ indirekt bestimmt.

Eine solche Relation soll ausdrücken, welche Modelle von A möglichst nahe an K liegen.

Modelle und maximale Kontraktionsmengen 1/2

Zur Erinnerung:

$$K \perp A = \{M \mid M \text{ maximale Kontraktionsmenge von } K \text{ bzgl. } A\}$$

Es gibt eine bijektive Beziehung zwischen maximalen Kontraktionsmengen in $K \perp A$ und Modellen in $Mod(\neg A)$ (wenn $A \in K$, keine Tautologie ist):

$$M \in K \perp A \quad \text{gdw.} \quad \begin{cases} M \text{ ist deduktiv abgeschlossen und} \\ Mod(M) \;=\; Mod(K) \cup \{\omega\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{für ein } \omega \in Mod(\neg A) \end{cases}$$

Identifiziert man ein Modell ω mit der (genau) passenden Vollkonjunktion bzw. der passenden Literalmenge, die genau ω als Modell hat, so ergibt sich daraus:

$$M \in K \perp A \quad \text{gdw.} \quad M = K \cap Cn(\omega),\ \omega \models \neg A.$$

Modelle und maximale Kontraktionsmengen 2/2

Daraus kann man eine bijektive Beziehung zwischen allen maximalen Kontraktionsmengen bzgl. K, $\mathcal{M}(K)$, und den Interpretationen, die keine Modelle von K sind, $\Omega - Mod(K)$, ableiten:

$$\mathcal{M}(K) \leftrightarrow \Omega - Mod(K)$$

Aus einer Relation über $\mathcal{M}(K)$ kann man also eine Relation über $\Omega - Mod(K)$ ableiten, die sich zu einer – von K abhängigen – Relation $\leq_K$ über Ω erweitern lässt, indem man alle Modelle von K als minimale (beste) Elemente definiert.

Minimale Modelle und AGM-Revision

Das heißt –

Wir wollen AGM-Revision (und Kontraktion) direkt durch eine Relation auf der Modellmenge Ω beschreiben bzw. definieren.

Kleiner Ausflug in die Modelltheorie

Sei Ω die Menge aller Interpretationen der (aussagenlogischen) Sprache $\mathcal{L}$.

Jedes $\omega \in \Omega$ kann mit einer Konjunktion von Literalen, in der jede atomare Variable aus $\mathcal{L}$ entweder positiv oder negiert auftritt, identifiziert werden, d.h. ein solches ω kann sowohl eine Interpretation wie auch eine Formel repräsentieren.

Beispiel: Die Sprache $\mathcal{L}$ habe die atomaren Variablen $\Sigma = \{a, b, c\}$. Dann entspricht z.B. der Interpretation

$$\begin{aligned} a &\mapsto \textit{true} \\ b &\mapsto \textit{false} \\ c &\mapsto \textit{true} \end{aligned}$$

die Formel

$$a \wedge \neg b \wedge c \equiv a\bar{b}c$$

Kleiner Ausflug in die Modelltheorie (Forts.)

Für eine Formel A ist

$$Mod(A) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \models A\}$$

die Menge aller Modelle von A.

Entsprechend ist für eine Formelmenge M

$$Mod(M) = \{\omega \in \Omega \mid \omega \models A \text{ für alle } A \in M\}$$

die Menge aller Interpretationen, die Modelle aller $A \in M$ sind.

Kleiner Ausflug in die Modelltheorie (Forts.)

Beispiel: Vokabular $\Sigma = \{a, b, c\}$;
$Mod(a \vee b) = \{abc, a\overline{b}c, ab\overline{c}, a\overline{b}\overline{c}, \overline{a}bc, \overline{a}b\overline{c}\}$ ♣

Wenn wir ausdrücklich zwischen der Formel ω und der zugehörigen Interpretation unterscheiden wollen, so schreiben wir I_ω für die zugehörige Interpretation.

Beispiel: Vokabular $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\omega = abc$;

$$I_{abc}(a \vee b) = true, \quad I_{abc}(a\overline{b}c) = false$$

♣

Diese Unterscheidung ist aber meist nicht nötig, denn es gilt für beliebige Formeln A:

$$I_\omega \models A \quad \text{gdw.} \quad \omega \models A.$$

Kleiner Ausflug in die Modelltheorie (Forts.)

Für ein Modell $\omega \in \Omega$ bzw. für eine Menge $\mathcal{M}$ von Modellen/Interpretationen wird definiert

$$\begin{aligned} \mathit{Th}(\omega) &= \{A \in \mathcal{L} \mid \omega \models A\} \\ \mathit{Th}(\mathcal{M}) &= \{A \in \mathcal{L} \mid \omega \models A \, \forall \, \omega \in \mathcal{M}\} \\ &= \bigcap_{\omega \in \mathcal{M}} \mathit{Th}(\omega) \end{aligned}$$

$\mathit{Th}(\omega)$ und $\mathit{Th}(\mathcal{M})$ sind deduktiv abgeschlossene Formelmengen. Insbesondere ist

$$\mathit{Th}(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2) = \mathit{Th}(\mathcal{M}_1) \cap \mathit{Th}(\mathcal{M}_2)$$

für Modellmengen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$.

Anmerkung: Wir benutzen die Begriffe Interpretation und Modell synonym.

Kleiner Ausflug in die Modelltheorie (Forts.)

Es ist

$$\begin{aligned} \mathit{Th}(\omega) &= Cn(\omega) \\ \bigcap_{\omega \in \mathcal{M}} \mathit{Th}(\omega) = \mathit{Th}(\mathcal{M}) &= Cn(\bigvee_{\omega \in \mathcal{M}} \omega) \end{aligned}$$

(beachten Sie, dass auf den linken Seiten ω als Modell gesehen wird und auf den rechten Seiten als Formel)

Beispiel: Vokabular $\Sigma = \{a, b, c\}$; $\mathcal{M} = \{a\bar{b}c, abc\}$;

$$\mathit{Th}(\mathcal{M}) = Cn(a\bar{b}c \vee abc) = Cn(ac).$$

♣

Kleiner Ausflug in die Modelltheorie (Forts.)

Th und Mod sind (im Wesentlichen) invers zueinander:

$$\begin{aligned} Th(Mod(A)) &= Cn(A) \\ Mod(Th(\mathcal{M})) &= \mathcal{M} \end{aligned}$$

Beispiel: Vokabular $\Sigma = \{a, b, c\}$;

$$\begin{aligned} Th(Mod(a)) &= Th(\{abc, a\bar{b}c, ab\bar{c}, a\bar{b}\bar{c}\}) \\ &= Cn(abc \vee a\bar{b}c \vee ab\bar{c} \vee a\bar{b}\bar{c}) = Cn(a); \\ Mod(Th(\{a\bar{b}c, abc\}) &= Mod(Cn(ac)) \\ &= Mod(ac) = \{a\bar{b}c, abc\} \end{aligned}$$

♣

Kleiner Ausflug in die Modelltheorie (Forts.)

Mod ist monoton bezgl. semantischer Folgerung, d.h.

$$A \models B \text{ impliziert } Mod(A) \subseteq Mod(B),$$

aber antiton bezgl. Mengeninklusion, d.h.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ impliziert } Mod(\mathcal{B}) \subseteq Mod(\mathcal{A}).$$

Th ist (ebenfalls) antiton bezgl. Mengeninklusion, d.h.

$$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \text{ impliziert } \mathit{Th}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathit{Th}(\mathcal{M}_1).$$

Daraus folgt insbesondere

$$\begin{array}{rcl} A \models B & \text{impliziert} & \mathit{Th}(Mod(B)) \subseteq \mathit{Th}(Mod(A)) \\ & \text{gdw.} & Cn(B) \subseteq Cn(A). \end{array}$$

Modelle und maximale Kontraktionsmengen (Whlg.)

Zur Erinnerung:

$$K \perp A = \{M \mid M \text{ maximale Kontraktionsmenge von } K \text{ bzgl. } A\}$$

Es gibt eine bijektive Beziehung zwischen maximalen Kontraktionsmengen in $K \perp A$ und Modellen in $Mod(\neg A)$ (wenn $A \in K$, keine Tautologie):

$$M \in K \perp A \quad \text{gdw.} \quad \begin{cases} M \text{ ist deduktiv abgeschlossen und} \\ Mod(M) \quad = \quad Mod(K) \cup \{\omega\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{für ein } \omega \in Mod(\neg A) \end{cases}$$

Identifiziert man ein Modell ω mit der (genau) passenden Vollkonjunktion bzw. der passenden Literalmenge, die genau ω als Modell hat, so ergibt sich daraus:

$$M \in K \perp A \quad \text{gdw.} \quad M = K \cap Cn(\omega),\ \omega \models \neg A.$$

Minimale Modelle

Grundidee

Benutze Relation auf der Menge aller Interpretationen, um zu entscheiden, welche Interpretationen Modelle von $K * A$ sein sollen; dadurch wird $K * A$ indirekt bestimmt.

Eine solche Relation soll ausdrücken, welche Modelle von A möglichst nahe an K liegen.

Dazu müssen wir

- eine Beziehung zu K ausdrücken;
- den Begriff der Nähe präzisieren.

Persistente Relationen

Eine Relation $\leq_K$ auf Ω heißt K-persistent, wenn gilt:

- Ist $\omega \in Mod(K)$, so gilt $\omega \leq_K \omega'$ für alle $\omega' \in \Omega$;
- ist $\omega \in Mod(K)$ und $\omega' \notin Mod(K)$, so gilt $\omega <_K \omega'$.

Für eine Teilmenge Ω' von Interpretationen definiere

$$\min(\Omega', \leq_K) = \{\omega \in \Omega' \mid \omega \text{ minimal bzgl. } \leq_K\}$$

Persistente Relationen und AGM-Revision 1/3

Theorem 11

Eine Revisionsfunktion $*$ *genügt den AGM-Postulaten* **(AGM *1) – (AGM *8)** *genau dann, wenn es eine totale persistente Präordnung* $\leq_K$ *auf* Ω *gibt, so dass*

$$Mod(K * A) = \min(Mod(A), \leq_K),$$

d.h.

$$K * A = \mathit{Th}(\min(Mod(A), \leq_K))$$

Anmerkung: Präordnung = reflexive und transitive Relation.

Persistente Relationen und AGM-Revision 2/3

Beweis des Theorems:

- Die durch eine totale persistente Halbordnung $\leq_K$ definierte Revision $*$ erfüllt alle AGM-Postulate: Nachrechnen!
- Zu jeder AGM-Revision $*$ wird eine passende totale persistente Halbordnung $\leq_K$ auf Ω definiert durch

$$\omega \leq_K \omega' \text{ gdw. } \begin{array}{l} \omega \in Mod(K), \text{ oder} \\ \omega \in Mod(K * (\omega \vee \omega')) \end{array}$$

so, dass $Mod(K * A) = \min(Mod(A), \leq_K)$.

Persistente Relationen und AGM-Revision 3/3

Ist $*$ eine AGM-Revision mit

$$Mod(K * A) = \min(Mod(A), \leq_K),$$

so gilt für konsistentes K

$$Mod(K) = \min(\Omega, \leq_K)$$

(wegen $K * \top = K$ und $Mod(\top) = \Omega$). Die Modelle von K sind also genau die minimalen Modelle bezgl. der Relation $\leq_K$.

Distanzmaße

Eine totale persistente Halbordnung $\leq_K$ ordnet die Modelle nach ihrer Ähnlichkeit mit den Modellen von K, bzw. nach ihrer Nähe zu den Modellen von K.

Die Nähe kann z.B. mit Hilfe einer Metrik gemessen werden, die die Distanz zwischen zwei Modellen misst. Eine passende (logische) Metrik ist das Distanzmaß von Dalal.

Distanzmaß von Dalal

Für ω, ω' definiere

$$\mathit{dist}(\omega, \omega') = \# \text{ Variablen } v \in \Sigma \text{ mit } I_\omega(v) \neq I_{\omega'}(v)$$

Für eine Menge $\mathcal{M}$ von Modellen ist dann

$$\mathit{dist}(\mathcal{M}, \omega') = \min_{\omega \in \mathcal{M}} \mathit{dist}(\omega, \omega')$$

Dalal-Revision

Definiere nun $\leq_K$ durch

$$\omega \leq_K \omega' \text{ gdw. } \mathit{dist}(Mod(K), \omega) \leq \mathit{dist}(Mod(K), \omega')$$

Dann ist $\leq_K$ eine totale, K-persistente Halbordnung, und folglich ist

$$Mod(K *_D A) = \min(Mod(A), \leq_K)$$

eine AGM-Revision. Diese Revision

- ist vollkommen unabhängig von der Syntax des Wissens in K;
- wird nur von den logischen Eigenschaften der Modelle bestimmt.

Beispiel Schwanensee

A Schwan, B Schweden, C Europa, D weiß

a priori-Wissen: $K = Cn(\{A, B,\ B \Rightarrow C,\ A \wedge C \Rightarrow D\})$
$= Cn(\{A, B, C, D\} = \mathit{Th}(ABCD)$

neue Information: $\neg D$

Wir berechnen $K * \neg D$ mit dem Distanzmaß nach Dalal:

Es ist $Mod(K) = \{ABCD\}$, also ist für jedes $\omega \in Mod(\neg D)$
$\mathit{dist}(Mod(K), \omega) \geq 1,$ wobei $\mathit{dist}(Mod(K), \omega) = 1$ gdw. $\omega = ABC\overline{D}$,
also ist $Mod(K *_D \neg D) = \min(Mod(\neg D), \leq_K) = \{ABC\overline{D}\}$, d.h.
$K *_D \neg D = Cn(ABC\overline{D})$.

AGM-Revision – Beispiel 1/2

V : *Vogel sein* F : *Fliegen können* P : *Pinguin sein*

$$m_1 = vfp \qquad m_2 = vf\overline{p} \qquad m_3 = v\overline{f}p \qquad m_4 = v\overline{f}\overline{p}$$
$$m_5 = \overline{v}fp \qquad m_6 = \overline{v}f\overline{p} \qquad m_7 = \overline{v}\overline{f}p \qquad m_8 = \overline{v}\overline{f}\overline{p}$$

$K = \mathit{Th}(vf\overline{p})$; zu berechnen: $K * p$

Dalal's Revision: $\quad Mod(K * p) = \min(Mod(p), \leq_K)$

$$\mathit{dist}(vf\overline{p}, \overline{v}fp) = 2 \qquad \mathit{dist}(vf\overline{p}, \overline{v}\overline{f}p) = 3$$
$$\mathit{dist}(vf\overline{p}, vfp) = 1 \qquad \mathit{dist}(vf\overline{p}, v\overline{f}p) = 2$$

also $Mod(K *_D p) = \{vfp\}$

AGM-Revision – Beispiel 2/2

Eine andere K-persistente Relation (ohne Dalal):

$m_5 = \overline{v}fp,\ m_7 = \overline{v}\overline{f}p$

$m_6 = \overline{v}f\overline{p}, m_8 = \overline{v}\overline{f}\overline{p}$

$m_1 = vfp, m_4 = v\overline{f}\overline{p}$

$m_3 = v\overline{f}p$

$m_2 = vf\overline{p}$

$K = \mathit{Th}(\{vf\overline{p}\})$

$$
\begin{aligned}
K * \{p\} &= \mathit{Th}(\min(\mathit{Mod}(\{p\}), \leq_K)) \\
&= \mathit{Th}(\{v\overline{f}p\}) \\
K * \{\overline{f}\} &= \mathit{Th}(\min(\mathit{Mod}(\{\overline{f}\}), \leq_K)) \\
&= \mathit{Th}(\{v\overline{f}p\}) \\
K * \{\overline{v}\} &= \mathit{Th}(\min(\mathit{Mod}(\{\overline{v}\}), \leq_K)) \\
&= \mathit{Th}(\{\overline{v}f\overline{p}, \overline{v}\overline{f}\overline{p}\}) \\
&= Cn(\{\overline{v}\,\overline{p}\})
\end{aligned}
$$

Kapitel 1

1. Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

1.7 Revision auf Formeln

Wissensmenge vs. Formel 1/2

Die Vorstellung einer Wissensmenge (= deduktiv abgeschlossene Formelmenge) ist für eine Implementierung ungeeignet, da solche Mengen grundsätzlich unendlich sind.

Auch die Darstellung einer Wissensmenge durch die zugehörige Modellmenge ist in der Praxis impraktikabel, da von exponentieller Komplexität (in der Anzahl der Variablen).

Jede Wissensmenge K lässt sich jedoch (im Wesentlichen eindeutig) durch eine Formel bestimmen, deren deduktiver Abschluss sie ist:

$$K = Cn(\{A_1, \ldots, A_n\}) = Cn(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$$

Wissensmenge vs. Formel 2/2

Jede solche Formel bezeichnen wir mit $\mathit{Core}(K)$:

$$\mathit{Core}(K) = A \quad \text{gdw.} \quad K = Cn(A)$$

$\mathit{Core}(K)$ ist bis auf logische Ãquivalenz eindeutig bestimmt, denn:

$$\begin{aligned} K = Cn(A_1) = Cn(A_2) \quad &\text{gdw.} \quad Mod(A_1) = Mod(A_2) = Mod(K) \\ &\text{gdw.} \quad A_1 \equiv A_2; \end{aligned}$$

damit gilt insbesondere

$$\mathit{Core}(K) \equiv \bigvee_{\omega \in Mod(K)} \omega$$

Cn und Core

Für deduktiv abgeschlossene Mengen K gilt:

$$\begin{array}{rcl} Cn(\mathit{Core}(K)) & = & K \\ \mathit{Core}(Cn(K)) & \equiv & \mathit{Core}(K); \end{array}$$

ferner ist

$$Mod(K) = Mod(\mathit{Core}(K)).$$

Revision von Formeln

Man kann Revision auf Wissensmengen K (mit einer Formel A) auf Revision auf Formeln ϕ (mit einer Formel A) reduzieren:

Jeder Revisionsoperator $*$ auf Wissensmengen induziert folglich einen Revisionsoperator $\circ$ auf Formeln $\phi \in \mathcal{L}$:

$$\phi \circ A = \mathit{Core}(Cn(\phi) * A)$$

(unabhängig von der Syntax von ϕ, wohldefiniert bis auf semantische Ãquivalenz).

Umgekehrt definiert jeder Revisionsoperator $\circ$ auf Formeln ϕ (der nur von der Semantik von ϕ abhängt) einen Revisionsoperator $*$ auf Wissensmengen K:

$$K * A = Cn(\mathit{Core}(K) \circ A).$$

Was wird aus der Expansion?

Sei K Wissensmenge mit $\mathit{Core}(K) \equiv \phi$, sei $A \in \mathcal{L}$ mit $\neg A \notin K$.

Vorüberlegung:

Es ist $\neg A \notin K$ gdw. $Mod(K) \cap Mod(A) \neq \emptyset$
gdw. $Mod(\phi) \cap Mod(A) \neq \emptyset$
gdw. $Mod(\phi \wedge A) \neq \emptyset$
gdw. $\phi \wedge A$ erfüllbar

Dann ist

$$K + A = Cn(\phi \wedge A), \phi = \mathit{Core}(K)$$

AGM-Postulate für Formelrevision

Die Postulate (AGM *1) – (AGM *8) für Wissensmengenrevision sind äquivalent zu den folgenden Postulaten für Formelrevision ($\phi, A \in \mathcal{L}$):

(RF 1) $\phi \circ A \models A$.

(RF 2) Wenn $\phi \wedge A$ erfüllbar ist, dann ist $\phi \circ A \equiv \phi \wedge A$.

(RF 3) Wenn A erfüllbar ist, dann ist auch $\phi \circ A$ erfüllbar.

(RF 4) Wenn $\phi_1 \equiv \phi_2$ und $A_1 \equiv A_2$, dann auch $\phi_1 \circ A_1 \equiv \phi_2 \circ A_2$.

(RF 5) $(\phi \circ A) \wedge B$ impliziert $\phi \circ (A \wedge B)$.

(RF 6) Wenn $(\phi \circ A) \wedge B$ erfüllbar ist, so gilt: $\phi \circ (A \wedge B) \models (\phi \circ A) \wedge B$.

Formelrevision und Modelle

Die Postulate (RF1) – (RF 6) lassen sich als Bedingungen an die K-persistenten Relationen bzw. an den Begriff der Nähe von Modellen interpretieren, z.B. bedeuten (RF5) & (RF6) zusammengenommen Folgendes für die Modelle:

> *Gibt es unter den Modellen von A, die möglichst nah zu $Mod(\phi)$ liegen, auch solche, die Modelle von B sind, so sind diese Modelle genau diejenigen, die in der Menge aller Modelle von A und B möglichst nah zu $Mod(\phi)$ liegen.*

pma-Revision 1/3

Nicht jeder Abstandsbegriff unter Modellen passt zu den AGM- bzw. RF-Postulaten:

Für zwei Modelle ω, ω' bezeichne

$$\mathit{Diff}(\omega, \omega') = \{v \in \Sigma \mid I_\omega(v) \neq I_{\omega'}(v)\}$$

die *Menge*[7] aller atomaren Variablen, in denen sich ω und ω' unterscheiden;

für ein Modell ω und eine Proposition A bezeichne

$$\mathit{Diff}(\omega, A) = \{\mathit{Diff}(\omega, \omega') \mid \omega' \in Mod(A)\}$$

die Menge aller solcher Differenzmengen zu Modellen von A.

[7] also nicht nur die *Anzahl*!

pma-Revision 2/3

Der pma-Revisionsoperator wird dann definiert wie folgt:

$$\begin{aligned} Mod(\phi \diamond_{pma} A) \quad = \quad & \{\omega' \in Mod(A) \mid \\ & \exists \omega \in Mod(\phi) \text{ so, dass} \\ & \mathit{Diff}(\omega, \omega') \text{ minimal (bezgl. Mengeninklusion) ist in} \\ & \quad \mathit{Diff}(\omega, A)\} \end{aligned}$$

pma = possible models approach

pma-Revision – Beispiel

Sei $\Sigma = \{a, b\}, \phi = a\bar{b} \vee \overline{a}b$; neue Information $(= A)$: a, d.h. zu berechnen ist

$$\phi \diamond_{pma} a$$

Mit $Mod(a) = \{ab, a\bar{b}\}, Mod(\phi) = \{a\bar{b}, \overline{a}b\}$ ist

$$\left.\begin{array}{r} \mathit{Diff}(a\bar{b}, ab) = \{b\} \\ \mathit{Diff}(a\bar{b}, a\bar{b}) = \emptyset \end{array}\right\} \quad \mathit{Diff}(a\bar{b}, a)$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathit{Diff}(\overline{a}b, ab) = \{a\} \\ \mathit{Diff}(\overline{a}b, a\bar{b}) = \{a, b\} \end{array}\right\} \quad \mathit{Diff}(\overline{a}b, a)$$

Also $Mod(\phi \diamond_{pma} a) = \{a\bar{b}, ab\}$, d.h. $\phi \diamond_{pma} a = a$.

pma-Revision 3/3

Der pma-Revisionsoperator erfüllt nicht die AGM-Postulate – $\diamond_{pma}$ erfüllt (RF1) und (RF3) - (RF5), aber verletzt (RF2) und (RF6).

Gegenbeispiel zu (RF2): s. obiges Beispiel
Hier ist

$$\phi \diamond_{pma} a = a \neq a\overline{b} = \phi \wedge a$$

Möglicher Kontext (Roboter-Buch-Szenario):

a ein Buch liegt auf dem Boden
b eine Zeitschrift liegt auf dem Boden

Roboter No 5 soll das Buch auf den Boden legen – mit dem (wünschenswerten) Ergebnis für die Beobachtung danach – $a = \phi \diamond_{pma} a$; $a\overline{b} = \phi \wedge a$ wäre hier unintuitiv! ♣

K-persistente Relationen auf Formeln

Jede K-persistente Relation $\leq_K$ auf Modellen induziert eine Relation auf Formeln:

$$
\begin{aligned}
A \leq_K B \quad & \text{gdw.} \quad \exists\, \omega \in Mod(A) \text{ so, dass } \omega \leq_K \omega' \;\forall \omega' \in Mod(B) \\
& \text{gdw.} \quad \min(Mod(A), \leq_K)) \leq_K \min(Mod(B), \leq_K))
\end{aligned}
$$

Es gilt dann für $A, B \in \mathcal{L}$:

$$A \vee B =_K \min(A, B)$$

Daraus folgt:

$$A \leq_K A \vee B \quad \text{oder} \quad B \leq_K A \vee B.$$

Minimale Modelle und ep. Verwurzelung 1/2

- Minimale Modelle: Bei den K-persistenten Relationen sind nur die Modelle außerhalb von K interessant und werden bewertet; die Modelle von K sind ohnehin optimal $\rightarrow$ Blickwinkel der Revision.
- Epistemische Verwurzelung: Hier konzentriert man sich auf die Modelle von K, alle anderen Modelle werden als irrelevant eingestuft $\rightarrow$ Blickwinkel der Kontraktion.

Minimale Modelle und ep. Verwurzelung 2/2

Zwischen beiden Ansätzen besteht der folgende Zusammenhang:

Ist $\leq_E$ eine epistemische Verwurzelungsrelation, so definiert

$$A \leq_K B \quad \text{gdw.} \quad \neg A \leq_E \neg B$$

eine K-persistente Relation und umgekehrt.

Ordinale Rangfunktionen

K-persistente Relationen lassen sich bequem durch ordinale Rangfunktionen (*ordinal conditional functions, OCF*)

$$\kappa : \Omega \to \mathbb{N}(\cup\{\infty\})$$

darstellen mit den charakteristischen Eigenschaften

$$\begin{array}{rcl} \kappa^{-1}(0) & \neq & \emptyset \\ \kappa(A \vee B) & = & \min\{\kappa(A), \kappa(B)\} \end{array}$$

Die Wissensmenge einer ordinalen Rangfunktion bestimmt sich durch

$$\mathit{Bel}(\kappa) = \mathit{Th}(\{\kappa^{-1}(0)\})$$

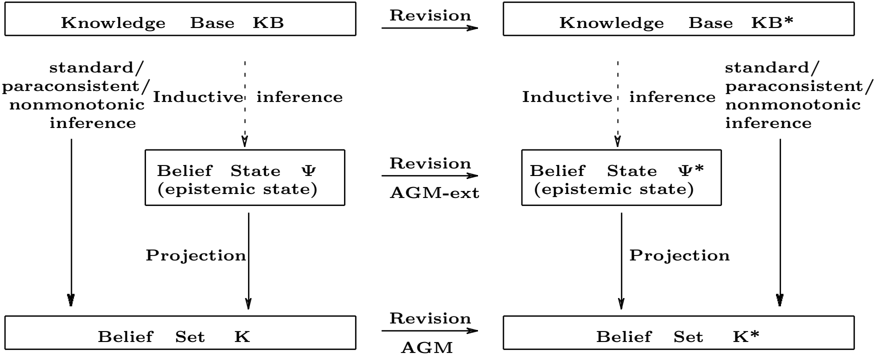
d.h. $Mod(\mathit{Bel}(\kappa)) = \{\omega \in \Omega \mid \kappa(\omega) = 0\}$.

Kapitel 1

1. Grundlagen der Wissensrevision (AGM-Theorie)

1.8 Inferenzen, Default reasoning und Wissenszustände

Wissensrepräsentation und -revision 1/2



Inferenzarten und Projektion

- Standard-Inferenz: Normale deduktive Inferenz.
- Parakonsistente Inferenz beschäftigt sich mit Strategien, um aus inkonsistenten Formelmengen sinnvolle Inferenzen zu ziehen; insbesondere kann hier nicht jede beliebige Formel abgeleitet werden.
- Nichtmonotone Inferenz $\rightarrow$ Schlussfolgern mit Default-Regeln.
- Induktive Inferenz ist die Ableitung von generischem Wissen aus Einzelfällen; wird hier meistens als Vervollständigung partiellen Wissens verstanden und für die Modellierung des Übergangs Wissensbasis $\rightarrow$ Wissenszustand benutzt.
- Projektion ist die Abbildung eines Wissenszustandes Ψ auf sein plausibelstes Wissen, d.h. auf seine Wissensmenge $Bel(\Psi)$.

Revision (BR) und nichtmonotone Logik (NMR) 1/2

…lassen sich verbinden durch den sog. Ramsey Test:

$$B \in K * A \quad \text{gdw. } A \mid\!\sim_{(K)} B$$
$$\text{bzw.} \quad C_K(A) = K * A$$

mit

$$C_K(A) = \{B \in \mathcal{L} \mid A \mid\!\sim_{(K)} B\}$$

Damit lassen sich teilweise Entsprechungen zwischen NMR-Eigenschaften und AGM-Revisionspostulaten herstellen; beispielsweise entsprechen die Postulate **(AGM *7)** und **(AGM *8)** (im Wesentlichen) der Kumulativität (s. DVEW).

Revision (BR) und nichtmonotone Logik (NMR) 2/2

Was bedeutet $A \mid\!\sim_{(K)} B$?

- Wenn der Agent A weiß, folgert er $B \rightarrow$ Wissensanwendung
- Wenn der Agent A wüßte, würde er B folgern $\rightarrow$ Wissensrevision

Eine nichtmonotone Inferenz repräsentiert folglich Wissensanwendungs- und -revisionsstrategien (wobei Wissensanwendung auch als eine Form der Wissensrevision – nämlich Focussing oder Expansion – verstanden werden kann).

Eine wichtige Basis für nichtmonotone Inferenzen stellen Default-Regeln dar.

Default-Regeln . . .

In der DVEW hatten Default-Regeln

Wenn A, dann (normalerweise, typischerweise, plausiblerweise etc.) B

unterschiedliche syntaktische Formeln:

- als (normale) Reiter'sche Defaults $\frac{A : B}{B}$;
- als Poole'sche Defaults $A(x) \Rightarrow B(x)$;
- als logische Regeln $B \leftarrow A, not\ \neg B$. beim logischen Programmieren bzw. im ASP.

. . . und Konditionale

Um von Syntaxunterschieden zu abstrahieren und den abstrakten Zusammenhang zwischen BR und NMR zu nutzen, werden Default-Regeln im Folgenden als Konditionale

$$(B|A)$$

geschrieben. Konditionale kodieren folglich sowohl unsichere Inferenzen als auch Revisionsstrategien. Sie drücken allgemeine regelhafte Zusammenhänge aus und werden daher auch weiterhin als (abstrakte) Regeln bezeichnet.

Yes, OCF can!

Zur vollständigen Behandlung von Revision benötigen wir einen Wissensrepräsentationsrahmen, der folgende Punkte abdeckt:

- Repräsentation von Wissenszuständen, insbesondere
- Möglichkeit der Darstellung allgemeiner konditionaler Beziehungen (Konditionale);
- Modellierung kumulativer Inferenzen;
- Realisierung von AGM-Revision;
- induktive Inferenz

OCF liefern für all diese Ansprüche passende Wissenszustände. (Wahrscheinlichkeitsverteilungen tun das auch, mehr dazu später.)

Ordinale konditionale Rangfunktionen (OCF)

...sind (s.o.) Funktionen der Form

$$\kappa : \Omega \to \mathbb{N}(\cup\{\infty\})$$

mit den charakteristischen Eigenschaften

$$\kappa^{-1}(0) \neq \emptyset, \quad \kappa(A \vee B) = \min\{\kappa(A), \kappa(B)\}$$

Die Wissensmenge einer ordinalen Rangfunktion bestimmt sich durch

$$\mathit{Bel}(\kappa) = \mathit{Th}(\{\kappa^{-1}(0)\})$$

d.h. $Mod(\mathit{Bel}(\kappa)) = \{\omega \in \Omega \mid \kappa(\omega) = 0\}$.

OCF's für Wissen, Revision und Inferenz

Eine OCF ordnet Formeln Glaubensgrade (genauer: Überraschungsgrade) zu, d.h. ist Repräsentation eines epistemischen Zustandes.

Jede OCF repräsentiert eine totale $K = \mathit{Bel}(\kappa)$-persistente Halbordnung (qualitatives Ranking) mittels

$$A \leq_\kappa B \quad \text{gdw.} \quad \kappa(A) \leq \kappa(B)$$

Totale K-persistente Halbordungen liefern die Basis für AGM-Revisionen:

$$K * A = \mathit{Th}(\min(\mathit{Mod}(A), \leq_\kappa))$$

Dank des Zusammenhangs zwischen BR und NMR lassen sich OCF's auch für unsicheres Schlussfolgern verwenden.

NMR mit OCF

Sei κ eine ordinale konditionale Funktion (OCF) mit Wissensmenge $K = \mathit{Bel}(\kappa)$.

$$
\begin{aligned}
A \mid\!\sim_{(K)} B \quad & \text{gdw.} \quad B \in K * A \\
& \text{gdw.} \quad \forall\, \omega \in \min(Mod(A), \leq_\kappa) : \omega \models B \\
& \text{gdw.} \quad \kappa(A \wedge B) < \kappa(A \wedge \neg B)
\end{aligned}
$$

Wir schreiben statt $\mid\!\sim_K$ auch $\mid\!\sim_\kappa$, wenn $\mathit{Bel}(\kappa) = K$.

NMR mit OCF – Beispiel

P *Pinguin*

V *Vogel*

F *fliegt*

$p\overline{v}f,\ p\overline{v}\overline{f}$	$\kappa(\omega) = 3$
pvf	$\kappa(\omega) = 2$
$pv\overline{f},\ \overline{p}v\overline{f}$	$\kappa(\omega) = 1$
$\overline{p}vf,\ \overline{p}\,\overline{v}f,\ \overline{p}\,\overline{v}\overline{f}$	$\kappa(\omega) = 0$

$K = \mathit{Bel}(\kappa) = Cn(\overline{p}(\overline{v} \vee vf))$

$$v \mid\!\sim f,\ p \mid\!\sim v,\ p \mid\!\sim \overline{f},\ \mid\!\sim \overline{p},\ pv \mid\!\sim \overline{f},\ f \mid\!\sim \overline{p}$$
$$f \in K * v,\ v \in K * p,\ \overline{f} \in K * p,\ \overline{p} \in K * \top,\ \overline{f} \in K * pv,\ \overline{p} \in K * f$$

Konditionale und OCF

Sei κ eine OCF; seien A, B Formeln. Definiere

$$\kappa(B|A) = \kappa(A \wedge B) - \kappa(A);$$

κ akzeptiert das Konditional $(B|A)$,

$$\kappa \models (B|A)$$

$$\begin{array}{ll} \text{gdw.} & A \mid\!\sim_{Bel(\kappa)} B \\ \text{gdw.} & B \in \mathit{Bel}(\kappa) * A \\ \text{gdw.} & \kappa(AB) < \kappa(A\overline{B}) \\ \text{gdw.} & \kappa(\overline{B}|A) > 0 \end{array}$$

In OCF lassen sich also Inferenz- und Revisionsaussagen (auch) durch Konditionale ausdrücken und behandeln.